

第四章 乘法公式與多項式

4-1 乘法公式與商高定理



本節重點

1. 常用乘法公式：

$$(1) \quad (a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

$$(2) \quad \text{和的平方公式：} (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(3) \quad \text{差的平方公式：} (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(4) \quad \text{平方差公式：} (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$(5) \quad \text{立方和公式：} a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$(6) \quad \text{立方差公式：} a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

2. 商高定理（又稱畢氏定理）：任意一個直角三角形，其二股的平方和等於斜邊平方。

▶ 範例 1

利用乘法公式，求下列各式的值：

$$(1) \quad 207^2 \quad (2) \quad 996^2 \quad (3) \quad 2008 \times 1992 \quad (4) \quad 198^2 - 98^2$$

$$(5) \quad \left(26\frac{1}{2}\right)^2 - \left(23\frac{1}{2}\right)^2$$

解： (1) $207^2 = (200 + 7)^2 = 200^2 + 2 \times 200 \times 7 + 7^2$
 $= 40000 + 2800 + 49 = 42849$

(2) $996^2 = (1000 - 4)^2 = 1000^2 - 2 \times 1000 \times 4 + 16$
 $= 1000000 - 8000 + 16 = 992016$

(3) $2008 \times 1992 = (2000 + 8)(2000 - 8) = 2000^2 - 8^2$
 $= 4000000 - 64 = 3999936$

(4) $198^2 - 98^2 = (198 + 98)(198 - 98) = 29600$

(5) $\left(26\frac{1}{2}\right)^2 - \left(23\frac{1}{2}\right)^2 = \left(26\frac{1}{2} + 23\frac{1}{2}\right)\left(26\frac{1}{2} - 23\frac{1}{2}\right)$
 $= 50 \times 3 = 150$

● 學生練習 ●

利用乘法公式，求下列各式的值：

- (1) 103^2 (2) 9995^2 (3) 206×194 (4) $299^2 - 199^2$
 (5) $\left(65\frac{1}{2}\right)^2 - \left(34\frac{1}{2}\right)^2$

▶ 範例 2

在下列各空格中填入適當的數：

(1) $(20 + 8)(20^2 - 20 \times 8 + 8^2) = 20^3 + \square^3$

(2) $(100 - 2)(100^2 + 100 \times 2 + 2^2) = \square^3 - 2^3$

解：(1) 利用立方和公式知

$$(20 + 8)(20^2 - 20 \times 8 + 8^2) = 20^3 + 8^3$$

(2) 利用立方差公式知

$$(100 - 2)(100^2 + 100 \times 2 + 2^2) = 100^3 - 2^3$$

● 學生練習 ●

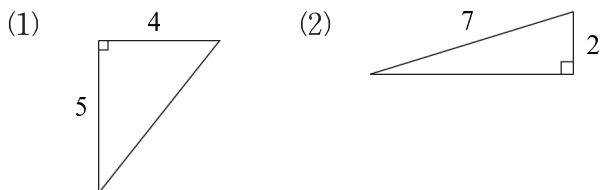
在下列各空格中填入適當的數：

(1) $(50 + 1)(50^2 - \square + 1^2) = 50^3 + 1^3$

(2) $(3 - 1)(\square^2 + 3 \times 1 + 1^2) = 3^3 - 1^3$

▶ 範例 3

已知下列各直角三角形的兩個邊長，求另一邊長：

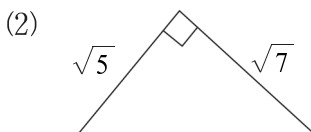
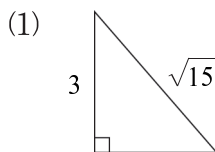


解：(1) 另一邊為 $\sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{41}$

(2) 另一邊為 $\sqrt{7^2 - 2^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

● 學生練習 ●

已知下列各直角三角形的兩個邊長，求另一邊長：



4-2 多項式與其四則運算



本節重點

1. **x 的多項式**：由數和文字符號 x 進行加法和乘法運算所構成的式子，稱為 x 的多項式。
2. **次數**：在一個多項式中， x 的**最高次數**就是這個多項式的次數。
例如： $2x^2 + 3x + 2$ 的次數為 2。
 $3x + 7$ 的次數為 1。
3. **同類項**：在多項式中， x 的次數相同的項，稱為同類項。
例如： x^3 、 $6x^3$ 為同類項。
4. **常數項**：不含文字符號 x 的項。
5. **係數**：文字符號前的數字（含性質符號）稱為**係數**。
例如： $5x^2$ ，則 x^2 項的係數為 5。

▶ 範例 1

下列多項式各是幾次多項式？有哪些項？各項的係數為何？

(1) $2x^2 + 5x + 8$

(2) $-9x$

解： (1) $2x^2 + 5x + 8$

① 為二次多項式

② 有 $2x^2$ 、 $5x$ 、 8 三項

③ x^2 項係數為 2， x 項係數為 5，常數項 8

(2) $-9x$

- ①為一次多項式
- ②只有 $-9x$ 一項
- ③ x 項係數為 -9

● 學生練習 ●

下列多項式各是幾次多項式？有哪些項？

(1) $-x^2 + 6$ (2) $x + 6$

▶ 範例 2

將同類項合併以化簡多項式 $x^2 + 2x^2 + 3x - 6x + 2$ 。

解： $x^2 + 2x^2 + 3x - 6x + 2 = (x^2 + 2x^2) + (3x - 6x) + 2$
 $= 3x^2 - 3x + 2$

● 學生練習 ●

將同類項合併以化簡下列各多項式：

(1) $2x^2 + 3x^2 - 3x + 2x - 5$
 (2) $-3x^2 - 5 - 4x - 6x - x^2 + 4$



升次排列與降次排列

1. **升次排列**：多項式中的各項按文字符號的次數由小到大排列，稱為**升次排列**。
2. **降次排列**：多項式中的各項按文字符號的次數由大到小排列，稱為**降次排列**。

▶ 範例 3

試將 $2x^2 - 3x^4 + 4x^3 - x + 5$ 依**升次及降次排列**。

解： 升次排列： $5-x+2x^2+4x^3-3x^4$

降次排列： $-3x^4+4x^3+2x^2-x+5$

● 學生練習 ●

試將下列各式依降次排列：

(1) $2x^2-3x^5+4x^3-3+6x$ (2) $-2x-x^3+5x^2+9-2x^4$



多項式的加、減法運算

1. **橫式計算：**合併同類項，再依升次或降次排列即可。
2. **直式計算：**
 - ①將要計算的多項式依升次或降次排列。
 - ②同類項上下對齊，缺項補「0」。
 - ③合併上下對應項。
3. **分離係數法：**將直式計算中之文字省略，僅寫出係數的計算方法。

▶ 範例 4

求多項式 $(x-2x^2+6)+(7x^2+3)$ 的和。

解： ①橫式計算

$$\begin{aligned}x-2x^2+6+7x^2+3 &= (-2x^2+7x^2)+x+(6+3) \\&= 5x^2+x+9\end{aligned}$$

②直式計算

$$\begin{array}{r} -2x^2+x+6 \\ +) \quad 7x^2+0+3 \\ \hline 5x^2+x+9 \end{array}$$

③分離係數法

$$\begin{array}{r} -2+1+6 \\ +) \quad 7+0+3 \\ \hline 5+1+9 \\ \therefore \text{得 } 5x^2+x+9 \end{array}$$

● 學生練習 ●

求下列各多項式的和：

- (1) $(2x^2 + x - 4) + (3x - 6x^2 - 6)$
 (2) $(x^2 - 9) + (2x^2 + 7x + 8)$

▶ 範例 5

計算 $(x^2 + 5x + 6) - (4x + 2x^2 + 3)$ 。

解：① 橫式計算

$$\begin{aligned} & (x^2 + 5x + 6) - (4x + 2x^2 + 3) \\ &= x^2 + 5x + 6 - 4x - 2x^2 - 3 \\ &= (x^2 - 2x^2) + (5x - 4x) + (6 - 3) = -x^2 + x + 3 \end{aligned}$$

② 直式計算

$$\begin{array}{r} x^2 + 5x + 6 \\ -) \quad 2x^2 + 4x + 3 \\ \hline -x^2 + x + 3 \end{array}$$

③ 分離係數法

$$\begin{array}{r} 1 + 5 + 6 \\ -) \quad 2 + 4 + 3 \\ \hline -1 + 1 + 3 \\ \therefore \text{得} -x^2 + x + 3 \end{array}$$

● 學生練習 ●

計算下列各式：

- (1) $(2x^2 + x - 4) - (3x - 6x^2 - 6)$
 (2) $(-8x^2 + 5x) - (-7x + 2x^2 - 4)$



多項式的乘法運算

1. 單項式 $\times$ 單項式：

只要把係數相乘，文字符號 x 也相乘，然後把係數寫在前面即可。例如：

$$5x \times 7x = 5 \times 7 \times x \times x = 35x^2$$

2. 單項式 $\times$ 多項式：

(1) 利用分配律： $a(b+c) = ab+ac$

(2) 再將同類項合併即可。

3. 多項式 $\times$ 多項式：

(1) 橫式計算：利用分配律

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

再合併同類項即可。

(2) 直式計算：依降次排列，遇缺項補「0」。再將乘式中每一項乘以被乘式的每一項，將上下對應的同次項相加。

(3) 分離係數法：同直式計算，只是不寫出文字符號。

注意：缺項補「0」喔！

▶ 範例 6

展開下列各式：

(1) $\frac{5}{3}x \times 6x$

(2) $(2x+1)(x-2)$

解：(1) $\frac{5}{3}x \times 6x = \frac{5}{\cancel{3}} \times \overset{2}{\cancel{6}} \times x \times x = 10x^2$

(2) ①橫式計算

$$(2x+1)(x-2) = 2x^2 - 4x + x - 2 = 2x^2 - 3x - 2$$

②直式計算

$$\begin{array}{r}
 2x + 1 \\
 \times) \quad x - 2 \\
 \hline
 2x^2 + x \\
 +) \quad -4x - 2 \\
 \hline
 2x^2 - 3x - 2
 \end{array}$$

③分離係數法

$$\begin{array}{r}
 2 + 1 \\
 \times) 1 - 2 \\
 \hline
 2 + 1 \\
 +) \quad -4 - 2 \\
 \hline
 2 - 3 - 2
 \end{array}
 \quad \therefore \text{得 } 2x^2 - 3x - 2$$

● 學生練習 ●

展開下列各式：

$$(1) \quad \frac{3}{2}x \times (-6x) \quad (2) \quad (-2x + 5)(3x - 4) \quad (3) \quad -8x(-x + 6)$$

▶ 範例 7

利用乘法公式展開下列各式：

$$(1) \quad (x + 5)^2$$

$$(2) \quad (2x + 1)(2x - 1)$$

$$\begin{aligned}
 \text{解：} (1) \quad (x + 5)^2 &= x^2 + 2 \times 5 \times x + 5^2 \\
 &= x^2 + 10x + 25
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad (2x + 1)(2x - 1) &= (2x)^2 - 1^2 \\
 &= 4x^2 - 1
 \end{aligned}$$

● 學生練習 ●

利用乘法公式展開下列各式：

$$(1) \quad (x - 6)^2$$

$$(2) \quad (3x + 1)(3x - 1)$$

$$(3) \quad (3x + 2)^2$$



多項式的除法運算

1. 長除法：

例如： $(x^2 + 4x + 4) \div (x + 1)$

其中 $x^2 + 4x + 4$ 稱為被除式， $x + 1$ 稱為除式

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 \text{-----} x^2 \div x = x \\
 \downarrow \\
 x + 3 \leftarrow \text{-----} 3x \div x = 3
 \end{array} \\
 x + 1 \overline{) x^2 + 4x + 4} \text{-----} \quad \text{運算中的被除式與除式均需} \\
 \quad \text{按降次排列} \\
 \quad \underline{x^2 + x} \quad \text{-----} (x + 1) \times x \\
 \quad \quad 3x + 4 \quad \text{-----} (x + 1) \times x \\
 \quad \quad \underline{3x + 3} \quad \text{-----} (x + 1) \times 3 \\
 \quad \quad \quad 1 \quad \text{-----} \because 1 \text{ 的次數} = 0 < \text{除式 } x + 1 \text{ 的次數} \\
 \quad \quad \quad \quad \therefore \text{停止運算}
 \end{array}$$

$\therefore$ 得商式為 $x + 3$ ，餘式為 1

2. 分離係數法：

例如： $(x^2 + 4x + 4) \div (x + 1)$

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 1 + 3 \\
 1 + 1 \overline{) 1 + 4 + 4} \\
 \quad \underline{1 + 1} \\
 \quad \quad 3 + 4 \\
 \quad \quad \underline{3 + 3} \\
 \quad \quad \quad 1
 \end{array}
 \end{array}$$

$\therefore$ 得商式 $x + 3$ ，餘式 1

3. 除法定理：被除式 = 除式 $\times$ 商式 + 餘式，其中餘式的次數必小於除式的次數。

▶ 範例 8

求 $(2x^2 + 3x + 4) \div (x + 2)$ 的商式和餘式。

解： 利用分離係數法

$$\begin{array}{r}
 2-1 \\
 1+2 \overline{) 2+3+4} \\
 \underline{2+4} \\
 -1+4 \\
 \underline{-1-2} \\
 6
 \end{array}$$

∴ 得商式為 $2x-1$ ，餘式為 6

● 學生練習 ●

求下列各題的商式和餘式：

(1) $(x^2 - 7x - 3) \div (x - 3)$ (2) $(x^2 + 8x) \div (x + 4)$

4-3 因式分解



本節重點

1. 將一個多項式分解為質因式的連乘積，這個過程稱為因式分解。
2. 因式分解的方法：
 - (1) 提公因式法。
 - (2) 分組分解法。
 - (3) 利用乘法公式。
 - (4) 十字交乘法。

▶ 範例 1

利用提公因式法因式分解 $5(x-1) - (1-x)^2$ 。

解： $5(x-1) - (1-x)^2 = 5(x-1) - (x-1)^2$
 $= (x-1) [5 - (x-1)] = (x-1)(6-x)$

● 學生練習 ●

因式分解 $(x+1)(x+2)^2 - (x+1)^2(x+2)$ 。

▶ 範例 2

利用分組分解法因式分解 $27x^3 - 9x^2 + 3x - 1$ 。

$$\begin{aligned}\text{解：} \quad 27x^3 - 9x^2 + 3x - 1 &= (27x^3 - 9x^2) + (3x - 1) \\ &= 9x^2(3x - 1) + (3x - 1) = (3x - 1)(9x^2 + 1)\end{aligned}$$

● 學生練習 ●

因式分解 $2x - 3y + 2xy - 3$ 。

▶ 範例 3

利用乘法公式因式分解下列式子：

$$(1) \quad 9a^2 - 25b^2 \quad (2) \quad 4a^2 + 12ab + 9b^2 \quad (3) \quad x^6 - 1 \quad (4) \quad x^3 + x^2 - 2$$

$$\begin{aligned}\text{解：} \quad (1) \quad 9a^2 - 25b^2 &= (3a)^2 - (5b)^2 \\ &= (3a + 5b)(3a - 5b) \\ (2) \quad 4a^2 + 12ab + 9b^2 &= (2a)^2 + 2(2a)(3b) + (3b)^2 \\ &= (2a + 3b)^2 \\ (3) \quad x^6 - 1 &= (x^3)^2 - 1^2 \\ &= (x^3 + 1)(x^3 - 1) \\ &= (x + 1)(x^2 - x + 1)(x - 1)(x^2 + x + 1) \\ (4) \quad x^3 + x^2 - 2 &= (x^3 - 1) + (x^2 - 1) \\ &= (x - 1)(x^2 + x + 1) + (x - 1)(x + 1) \\ &= (x - 1)(x^2 + 2x + 2)\end{aligned}$$

● 學生練習 ●

因式分解 $x^4 - 81$ 。

▶ 範例 4

因式分解 $5x^2 - 14xy - 24y^2$ 。

解：利用十字交乘法

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{cc} 5 & +6 \\ 1 & -4 \end{array} \\
 \hline
 -20 + 6 = -14
 \end{array}$$

$$5x^2 - 14xy - 24y^2 = (5x + 6y)(x - 4y)$$

● 學生練習 ●

因式分解 $2(a-b)^2 + 5(a-b) - 12$ 。

自我評量

1. 請完成下列完全平方公式，平方差公式，立方和公式，立方差公式。

(1) $(a + b)^2 =$

(2) $a^2 - 2ab + b^2 =$

(3) $a^2 - b^2 =$

(4) $a^3 + b^3 =$

(5) $(a-b)$ $= a^3 - b^3$

2. 多項式 $-7x^2 + x - 7$ 中，下列敘述是否正確？

(1) 它是一個 x 的 2 次多項式

(2) x 的係數為 1

(3) 常數項是 7

(4) $-7x^2$ 和 -7 是同類項

3. 將同類項合併以化簡下列各多項式：

(1) $-5x^2 + 3x^2 - 2x + 5x - 7 - x^3$

(2) $6x + 7x^2 + 5 + 6x^2 - 6 + 7x$

4. 計算下列各式（按降次排列）：

(1) $(x^2 + x + 1) + (2x^2 + x + 1)$

(2) $(2x - 3x^2) - (2 - 3x^2 + x)$

(3) $(5x + 7) - (6x + x^2 - 4x)$

(4) $(2x^2 + 6x - 5) - (5 + 4x^2 - 6x) - (2x^2 - 1 + 3x)$

5. 填充題：

(1) $-2x \times (-4x) =$

(2) $-\frac{3}{2}x \times (8x) =$

(3) $x \times$ $= -2x^2$

(4) $7x^2 \div x =$

(5) $2x \times$ $= 5x^2$

(6) $(6x)^2 =$

6. 展開下列各乘積：

(1) $-2x(x + 1)$

(2) $(-2x - 3) \left(\frac{3}{2}x \right)$

(3) $(-5 + x)(x + 4)$

(4) $(3x - 1)(-3x + 5)$

(5) $(4 + 2x)(-6x - 3)$

(6) $(-3x + 1)(-3x - 1)$

(7) $(3x - 2)^2$

7. 求出下列各題的商式及餘式：

(1) $(3x^2 - 10x + 6) \div (-3x)$

(2) $(x^2 - x - 3) \div (x - 3)$

(3) $(2x^2 - 7x) \div (-x + 3)$

(4) $(x^2 + 4) \div (2x + 1)$

8. 計算下列各式的值（按降次排列）：

(1) $(7x^2 - 6x - 1) \div (7x + 1) \times (x - 1)$

(2) $(2 - 3x)(3x - 1) - (4x^2 - 2x - 1) + 5$

9. 因式分解下列各式：

(1) $(x + 3)^2 - 4(x + 3)$

(2) $2(x - 3) - (x^2 - 3x)$

(3) $(x + y)^2 - 4$

(4) $a^4 - b^4$

(5) $16x^2 + 8x + 1$

(6) $64x^3 - 27$