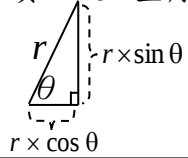


三角形定理與應用

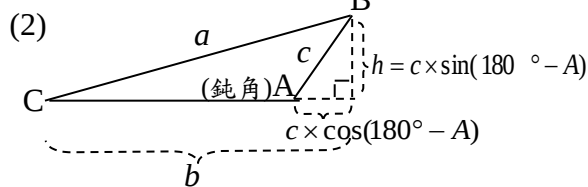
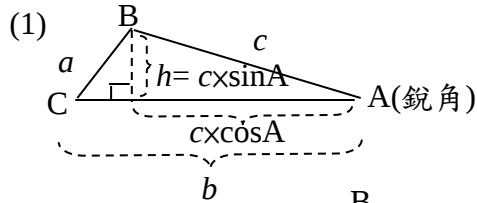
性質：設一直角三角形的斜邊長為 r 且某一內角為 θ ，則



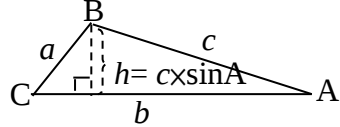
- (1) 對邊長 $= r \times \sin \theta$
(2) 鄰邊長 $= r \times \cos \theta$

(依定義可得證)

任意的 $\triangle ABC$ 可依 $\angle A$ 是否為銳角、直角或鈍角，分類如下：



性質：三角形面積 $= \frac{1}{2} \times \text{底} \times \text{高} = \frac{1}{2} \times b \times c \times \sin A$



$$= \frac{1}{2} \times a \times c \times \sin B$$

$$= \frac{1}{2} \times a \times b \times \sin C$$

由 $\triangle$ 面積

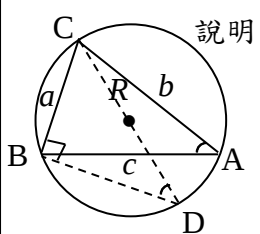
$$= \frac{1}{2} \times b \times c \times \sin A = \frac{1}{2} \times a \times c \times \sin B = \frac{1}{2} \times a \times b \times \sin C$$

得 $\therefore \frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A}$ 且 $\therefore \frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B}$

正弦定理：三對的 $\frac{\text{對邊長}}{\sin \text{對角}}$ 之比值相等且等於 $2R$

(1) $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ 即 三對 $\frac{\text{對邊長}}{\sin \text{對角}}$ 之比值相等

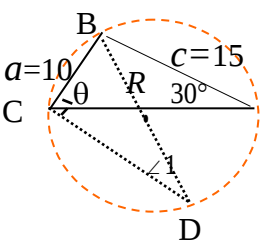
(2) 三對的 $\frac{\text{對邊長}}{\sin \text{對角}}$ 之比值相等且等於 $2R$ 。



說明：如左圖，對同一圓弧 BC 的周角相等，所以 $\angle CAB = \angle CDB$ 。另外 $\angle CBD = 90^\circ$ 。

因此， $\frac{a}{2R} = \sin D = \sin A \Rightarrow \frac{a}{\sin A} = 2R$

例 6. 【正弦定理】



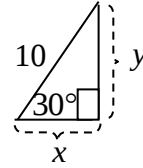
如圖，此圓稱為該三角形的外接圓，令其半徑為 R 。

- 試求：(1) $\angle BDC = \angle 1 =$ _____
(2) $\angle BCD =$ _____
(3) 外接圓的半徑 $R =$ _____

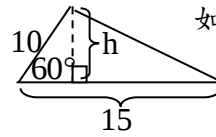
在 $\triangle BCD$ 中，因為 $\frac{10}{2R} = \sin \angle BDC = \sin 30^\circ$ ，

所以 $\frac{10}{\sin 30^\circ} = 2R \Rightarrow R = 10$

例 1. 如圖，求 $y =$ _____， $x =$ _____



例 2. 【已知兩邊長與其夾角，求三角形面積】



- 如圖，求(1) 高 $h =$ _____
(2) 此三角形的面積 $=$ _____

餘弦定理：對邊² = 鄰₁² + 鄰₂² - 2 × 鄰₁ × 鄰₂ × cos 夾角

- (1) $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \times b \times c \times \cos A$ (2) $b^2 = a^2 + c^2 - 2 \times a \times c \times \cos B$
(3) $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \times a \times b \times \cos C$

說明：如左圖(1)(2)，依商高定理知，

(1) 當 $\angle A$ 為銳角時：

$$a^2 = (b - c \times \cos A)^2 + (c \times \sin A)^2$$

$$= b^2 + c^2 \times \cos^2 A - 2 \times b \times c \times \cos A + c^2 \times \sin^2 A$$

$$= b^2 + c^2 - 2 \times b \times c \times \cos A$$

(2) 當 $\angle A$ 為鈍角時：

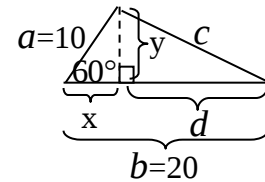
$$a^2 = [b + c \times \cos(180^\circ - A)]^2 + [c \times \sin(180^\circ - A)]^2$$

$$= [b + c \times (-\cos A)]^2 + [c \times \sin A]^2$$

$$= b^2 + c^2 \times \cos^2 A - 2 \times b \times c \times \cos A + c^2 \times \sin^2 A$$

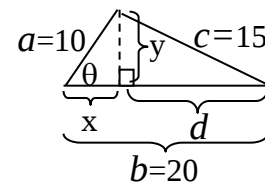
$$= b^2 + c^2 - 2 \times b \times c \times \cos A$$

例 3. 【已知兩邊長與其夾角，求第三邊長】



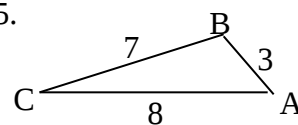
- 如圖，試求 (1) $y =$ _____
(2) $x =$ _____ (3) $d =$ _____
(4) $c =$ _____

例 4. 【已知三邊長，求某一內角或其 cos 值】



- 如圖，試求 (1) $y =$ _____
(2) $x =$ _____ (3) $d =$ _____
(4) $\cos \theta =$ _____

例 5.



如圖，試求

- (1) $\cos A =$ _____
(2) 三角形的面積 $\Delta =$ _____

海龍公式：

$\triangle ABC$ 的面積 $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ ，其中 $s = \frac{a+b+c}{2}$

說明：

(1) $\triangle ABC$ 的面積 $= \frac{1}{2} bc \sin A$

$$\therefore \Delta^2 = \left(\frac{1}{2} bc \sin A\right)^2 = \frac{1}{4} b^2 c^2 \sin^2 A = \frac{1}{4} b^2 c^2 (1 - \cos^2 A)$$

$$\Rightarrow \Delta = \frac{1}{2} bc \sqrt{1 - \cos^2 A} \quad \text{其中 } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

(2) 而且 $\Delta^2 = \frac{1}{4} b^2 c^2 (1 - \cos^2 A) \xrightarrow{\text{因式分解}} \frac{1}{4} bc(1 + \cos A)(1 - \cos A)$

代入 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

$$\frac{1}{4} b^2 c^2 \left(1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right) \left(1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)$$

通分 $\frac{1}{4} b^2 c^2 \left(\frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right) \left(\frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2bc}\right)$

化簡 $\frac{1}{4} b^2 c^2 \left[\frac{(b+c)^2 - a^2}{2bc}\right] \left[\frac{a^2 - (b-c)^2}{2bc}\right]$

約分 $\frac{1}{16} [(b+c)^2 - a^2] [a^2 - (b-c)^2]$

因式分解 $\frac{1}{16} (b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)$

$= \frac{1}{16} (2s)(2s-2a)(2s-2b)(2s-2c)$ ，令 $s = \frac{a+b+c}{2}$

$= \frac{1}{16} \cdot 2 \cdot s \cdot 2 \cdot (s-a) \cdot 2 \cdot (s-b) \cdot 2 \cdot (s-c)$

$= \frac{1}{16} \cdot 16 \cdot s(s-a)(s-b)(s-c)$
 $\therefore \Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$