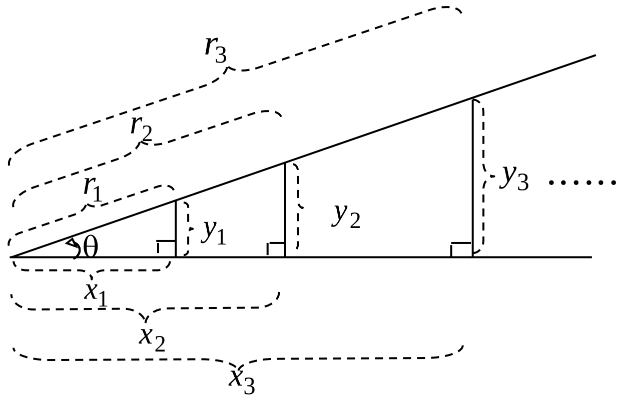
銳 角 三 角 函 數

銳角三角函數——主要探討一**直角三角形中，三個邊長之任二邊長的比值**。如下圖所示，因為圖中的個個三角形皆為相似三角形，故對應的邊長之比值相等，即



(1) $\dfrac{y_1}{r_1}=\dfrac{y_2}{r_2}=\dfrac{y_3}{r_3}=\Lambda\Lambda$ (此<u>比值</u>稱為角θ的sin 函數值，記作：$\boxed{\sin\theta}$)

(2) $\dfrac{x_1}{r_1}=\dfrac{x_2}{r_2}=\dfrac{x_3}{r_3}=\Lambda\Lambda$ (此<u>比值</u>稱為角θ的cos 函數值，記作：$\boxed{\cos\theta}$)

(3) $\dfrac{y_1}{x_1}=\dfrac{y_2}{x_2}=\dfrac{y_3}{x_3}=\Lambda\Lambda$ (此<u>比值</u>稱為角θ的tanθ函數值，記作：$\boxed{\tan\theta}$)

(4) $\dfrac{x_1}{y_1}=\dfrac{x_2}{y_2}=\dfrac{x_3}{y_3}=\Lambda\Lambda$ (此<u>比值</u>稱為角θ的cotθ函數值，記作：$\boxed{\cot\theta}$)

(5) $\dfrac{r_1}{x_1}=\dfrac{r_2}{x_2}=\dfrac{r_3}{x_3}=\Lambda\Lambda$ (此<u>比值</u>稱為角θ的secθ函數值，記作：$\boxed{\sec\theta}$)

(6) $\dfrac{r_1}{y_1}=\dfrac{r_2}{y_2}=\dfrac{r_3}{y_3}=\Lambda\Lambda$ (此<u>比值</u>稱為角θ的cscθ函數值，記作：$\boxed{\csc\theta}$)

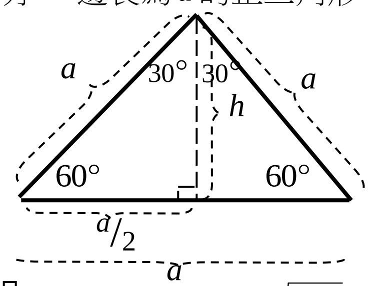
六個三角函數的唸法：		簡 寫	
<u>sine</u>	/ˊsaɪn/	sin	**<u>正弦</u>函數**
<u>co</u>sine	/kəˊsaɪn/	cos	**餘弦函數**
<u>tan</u>gent	/ˊtændʒənt/	tan	**<u>正切</u>函數**
<u>cot</u>angent	/kəˊtændʒənt/	cot	**餘切函數**
<u>sec</u>ant	/ˊsɛkənt/	sec	**<u>正割</u>函數**
<u>co</u>s<u>ec</u>ant	/kəˊsɛkənt/	csc	**餘割函數**

顯然地， $\boxed{\sin\theta}$ ⟸互為倒數⟹ $\boxed{\csc\theta}$

$\boxed{\cos\theta}$ ⟸互為倒數⟹ $\boxed{\sec\theta}$

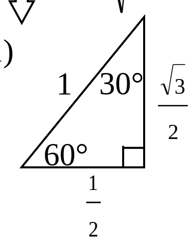
$\boxed{\tan\theta}$ ⟸互為倒數⟹ $\boxed{\cot\theta}$

說明： 邊長為 a 的正三角形



$\Theta\ h=\sqrt{a^2-(\frac{a}{2})^2}=\sqrt{\frac{3a^2}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$

(1)

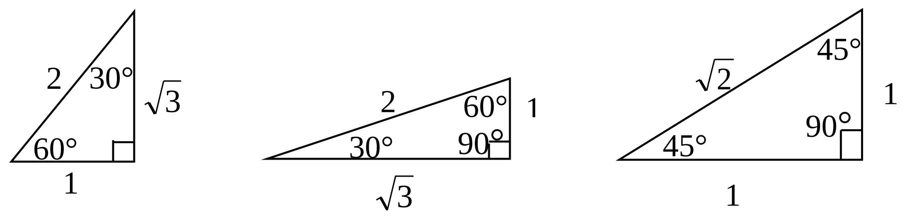


(邊長比例)

(2)面積 $=\dfrac{1}{2}\times$ 底 $\times$ 高

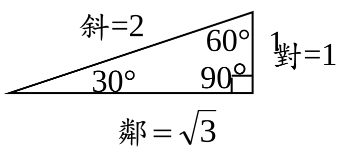
$=\dfrac{1}{2}\times a\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}a=\boxed{\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2}$

依據國中時所熟知的三個直角三角形之邊長比例(如下)，我們可以算出各角的六個三角函數值。



例1. 求角30°的六個三角函數值。

解：依據邊長比(如下)， 可得 $\sin 30°=\dfrac{對邊}{斜邊}=\dfrac{1}{2}$ ； $\csc 30°=\dfrac{斜邊}{對邊}=\dfrac{2}{1}=2$

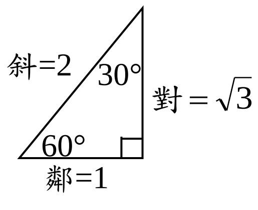


$\cos 30°=\dfrac{鄰邊}{斜邊}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ； $\sec 30°=\dfrac{斜邊}{鄰邊}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

$\tan 30°=\dfrac{對邊}{鄰邊}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ； $\cot 30°=\dfrac{鄰邊}{對邊}=\dfrac{\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3}$

例2. 求角60°的六個三角函數值。

解：依據邊長比(如下)， 可得 $\sin 60°=\dfrac{對邊}{斜邊}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ； $\csc 60°=\dfrac{斜邊}{對邊}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

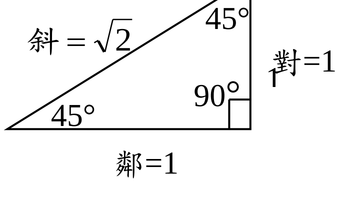


$\cos 60°=\dfrac{鄰邊}{斜邊}=\dfrac{1}{2}$ ； $\sec 60°=\dfrac{斜邊}{鄰邊}=\dfrac{2}{1}=2$

$\tan 60°=\dfrac{對邊}{鄰邊}=\dfrac{\sqrt{3}}{1}$ ； $\cot 60°=\dfrac{鄰邊}{對邊}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

例3. 求角45°的六個三角函數值。

解：依據邊長比(如下)， 可得 $\sin 45°=\dfrac{對邊}{斜邊}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ； $\csc 45°=\dfrac{斜邊}{對邊}=\dfrac{\sqrt{2}}{1}=\sqrt{2}$



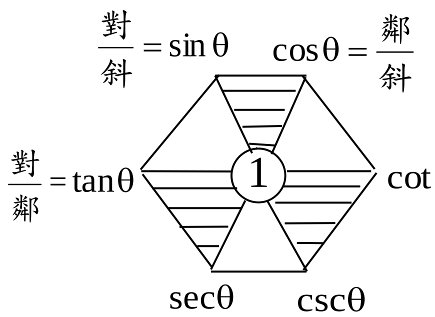
$\cos 45°=\dfrac{鄰邊}{斜邊}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ； $\sec 45°=\dfrac{斜邊}{鄰邊}=\dfrac{\sqrt{2}}{1}=\sqrt{2}$

$\tan 45°=\dfrac{對邊}{鄰邊}=\dfrac{1}{1}=1$ ； $\cot 45°=\dfrac{鄰邊}{對邊}=\dfrac{1}{1}=1$

摘要：

(1) 並非任意之銳角的三角函數值，皆可如左求得；但可利用書本後附表查得近似值。

(2) 請分別將30°、45°、60°的三邊長比例記好，並依據下列定義就能求得其三角值。(定義要記好!!)



※<u>對面二者的三角值互為倒數</u>。

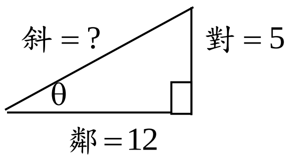
※ $\boxed{\tan\theta}=\dfrac{對}{鄰}=\dfrac{\frac{對}{斜}}{\frac{鄰}{斜}}=\boxed{\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}$

例4. (題型一：已知一角θ的某一三角值，求其他五個三角值。)

設 $0° < \theta < 90°$ 且 $\tan\theta = \dfrac{5}{12}$，則 (1) 角θ的另外五個三角值為何？

(2) $\sin\theta + \cos\theta = ?$ (3) $\dfrac{\sin\theta - \sec\theta}{\sin\theta + \cos\theta}$ =? ※ (4) $\dfrac{\sin\theta + 2\cos\theta}{\sin\theta - \cos\theta}$ =? (特例 !!)

解： (1)依據題意，角θ的直角三角形及三邊長比如下，



其中 斜 $= \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13$。

因此， $\sin\theta = \dfrac{對邊}{斜邊} = \dfrac{5}{13}$ ；$\csc\theta = \dfrac{斜邊}{對邊} = \dfrac{13}{5}$

$\cos\theta = \dfrac{鄰邊}{斜邊} = \dfrac{12}{13}$ ；$\sec\theta = \dfrac{斜邊}{鄰邊} = \dfrac{13}{12}$

$\tan\theta = \dfrac{對邊}{鄰邊} = \dfrac{5}{12}$ ；$\cot\theta = \dfrac{鄰邊}{對邊} = \dfrac{12}{5}$

(2) $\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{5}{13} + \dfrac{12}{13} = \dfrac{17}{13}$

(3) $\dfrac{\sin\theta - \sec\theta}{\sin\theta + \cos\theta} = \dfrac{\frac{5}{13} - \frac{13}{12}}{\frac{5}{13} + \frac{12}{13}} = \dfrac{-\frac{106}{13\cdot 12}}{\frac{17}{13}} = -\dfrac{106}{12\cdot 17} = \dfrac{53}{102}$

(4) $\dfrac{\sin\theta + 2\cos\theta}{\sin\theta - \cos\theta} = \dfrac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + 2\frac{\cancel{\cos\theta}}{\cancel{\cos\theta}}}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta} - \frac{\cancel{\cos\theta}}{\cancel{\cos\theta}}} = \dfrac{\tan\theta + 2}{\tan\theta - 1} = \dfrac{\frac{5}{12} + 2}{\frac{5}{12} - 1} = \dfrac{\frac{29}{12}}{-\frac{7}{12}} = -\dfrac{29}{7}$