

一般角化成銳角

一般角化成銳角：以下二公式的目的並不只是能將任意角換成銳角而已，而是能將任意角 θ 換成 Y 軸 $\pm\theta$ 或 X 軸 $\pm\theta$ 。亦即兩角相加或相減為 X 軸或 Y 軸上的象限角，都可用下列兩公式來轉換。 ※請注意轉換的規則!!

公式一：Y 軸 $\pm\theta \iff$ 如： $\left. \begin{matrix} \pm \frac{\pi}{2} \\ \pm \frac{3\pi}{2} \end{matrix} \right\} \pm\theta$

對調

$$\begin{cases} \sin \\ \cos \\ \tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) \\ \cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) \\ \sec \\ \csc \end{cases} = \begin{cases} +\cos \\ +\sin \\ +\cot(\theta) \\ +\tan(\theta) \\ +\csc \\ +\sec \end{cases}$$

對調

$$\begin{cases} \sin \\ \cos \\ \tan\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right) \\ \cot\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right) \\ \sec \\ \csc \end{cases} = \begin{cases} -\cos \\ -\sin \\ +\cot(\theta) \\ +\tan(\theta) \\ -\csc \\ -\sec \end{cases}$$

對調

$$\begin{cases} \sin \\ \cos \\ \tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) \\ \cot\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) \\ \sec \\ \csc \end{cases} = \begin{cases} +\cos \\ -\sin \\ -\cot(\theta) \\ -\tan(\theta) \\ -\csc \\ +\sec \end{cases}$$

對調

$$\begin{cases} \sin \\ \cos \\ \tan\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right) \\ \cot\left(\frac{3\pi}{2}+\theta\right) \\ \sec \\ \csc \end{cases} = \begin{cases} -\cos \\ +\sin \\ -\cot(\theta) \\ -\tan(\theta) \\ +\csc \\ -\sec \end{cases}$$

公式二：X 軸 $\pm\theta \iff$ 如： $\left. \begin{matrix} \pm 0 \\ \pm \pi \end{matrix} \right\} \pm\theta$

照抄

$$\begin{cases} \sin \\ \cos \\ \tan(\pi-\theta) \\ \cot(\pi-\theta) \\ \sec \\ \csc \end{cases} = \begin{cases} +\sin \\ -\cos \\ -\tan(\theta) \\ -\cot(\theta) \\ -\sec \\ +\csc \end{cases}$$

照抄

$$\begin{cases} \sin \\ \cos \\ \tan(2\pi-\theta) \\ \cot(2\pi-\theta) \\ \sec \\ \csc \end{cases} = \begin{cases} -\sin \\ +\cos \\ -\tan(\theta) \\ -\cot(\theta) \\ +\sec \\ -\csc \end{cases}$$

照抄

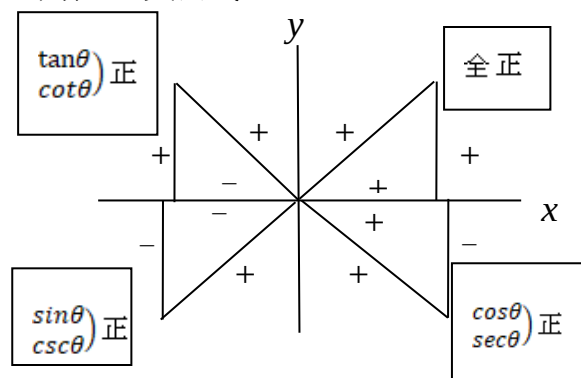
$$\begin{cases} \sin \\ \cos \\ \tan(\pi+\theta) \\ \cot(\pi+\theta) \\ \sec \\ \csc \end{cases} = \begin{cases} -\sin \\ -\cos \\ +\tan(\theta) \\ +\cot(\theta) \\ -\sec \\ -\csc \end{cases}$$

照抄

$$\begin{cases} \sin \\ \cos \\ \tan(2\pi+\theta) \\ \cot(2\pi+\theta) \\ \sec \\ \csc \end{cases} = \begin{cases} +\sin \\ +\cos \\ +\tan(\theta) \\ +\cot(\theta) \\ +\sec \\ +\csc \end{cases}$$

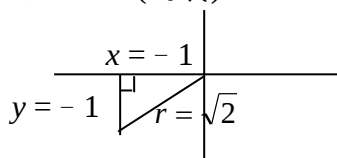
備註：等式右邊的 + 或 -，由左邊的角度視為第幾象限並參考下列三角值正負性質決定之。

各三角值正/負公式：



例：說明 $\sin 225^\circ = ?$

方法一：(定義)



$$\therefore \sin 225^\circ = \frac{y}{r} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

方法二：(公式一)

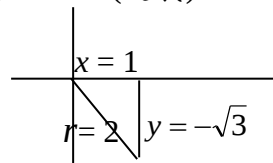
$$\begin{aligned} \sin 225^\circ &= +\sin(180^\circ - 225^\circ) \\ &= \sin(-45^\circ) \\ &= -\sin 45^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

方法三：(公式二)

$$\begin{aligned} \sin 225^\circ &= +\cos(270^\circ - 225^\circ) \\ &= -\cos(45^\circ) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

例：說明 $\tan 300^\circ = ?$

方法一：(定義)



$$\therefore \tan 300^\circ = \frac{y}{x} = \frac{-\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3}$$

方法二：(公式一)

$$\begin{aligned} \tan 300^\circ &= -\tan(360^\circ - 300^\circ) \\ &= -\tan(60^\circ) \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3} \end{aligned}$$

方法三：(公式二)

$$\begin{aligned} \tan 300^\circ &= +\cot(270^\circ - 300^\circ) \\ &= \cot(-30^\circ) \\ &= -\cot(30^\circ) = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

例1. 運用上述公式換角 !!

$$(1) \cos(180^\circ - \theta) = () () \theta \quad (2) \tan(180^\circ + \theta) = () () \theta$$

$$(3) \cot(90^\circ - \theta) = () () \theta \quad (4) \csc(90^\circ + \theta) = () () \theta$$

$$(5) \cos(360^\circ - \theta) = () () \theta \quad (6) \tan(270^\circ + \theta) = () () \theta$$

$$(7) \sec(-450^\circ + \theta) = () () \theta \quad (8) \csc(-630^\circ - \theta) = () () \theta$$

※等式左右邊的兩角和或差為 X 軸象限角 !

例2. ※ 運用上述公式換角 !!

$$(1) \cos \theta = () () (180^\circ - \theta) \quad (2) \tan \theta = () () (90^\circ - \theta)$$

$$(3) \cot \theta = () () (-180^\circ - \theta) \quad (4) \csc \theta = () () (270^\circ - \theta)$$

$$(5) \cos(-\theta) = () () (180^\circ + \theta) \quad (6) \tan \theta = () () (-\theta - 180^\circ)$$

$$(7) \sec \theta = () () (-\theta - 90^\circ) \quad (8) \csc \theta = () () (-270^\circ - \theta)$$

※等式左右邊的兩角和或差為 X 軸象限角 !

例3. 下列敘述何者為真 ? (複選)

$$(A) \sin(-15^\circ) = \sin 15^\circ \quad (B) \cos(-15^\circ) = \cos 15^\circ$$

$$(C) \tan(-15^\circ) = \tan 15^\circ \quad (D) \cot 75^\circ = \tan 15^\circ$$

$$(E) \sec 115^\circ = -\sec 65^\circ \quad (F) \cot 105^\circ = -\tan 15^\circ$$

$$(G) \tan(-230^\circ) = -\tan 130^\circ \quad (H) \cot 75^\circ = -\tan 195^\circ$$

例4. 已知 $\cot \theta = 3$, 則 $\tan(270^\circ - \theta) = ?$

例5. 已知 $\cos 12^\circ = k$, 則 $\sin 282^\circ = ?$

例6. 已知 $\tan 22^\circ = k$, 則 $\sin 2002^\circ = ?$

例7. 化簡 $\frac{\sin(90^\circ + \theta) \cos(90^\circ - \theta)}{\cos(180^\circ + \theta)} + \frac{\sin(180^\circ - \theta) \cos(270^\circ - \theta)}{\sin(360^\circ - \theta)}$

例8. 化簡 $\frac{\sin(\pi - \theta)}{\sin(\theta - 2\pi)} - \frac{\tan(\theta - \frac{\pi}{2})}{\cot(\pi + \theta)} + \frac{\sin(\theta - \frac{3}{2}\pi)}{\cos(\theta - \pi)}$ 得 _____

例9. 求值 $\sin(2\pi - \theta) \sec(\frac{1}{2}\pi + \theta) + \tan(\frac{3}{2}\pi - \theta) \cot(\frac{3}{2}\pi + \theta) = \underline{\hspace{2cm}}$

例10. $\sin 10^\circ - \tan 20^\circ + \cot 70^\circ - \cos 80^\circ = \underline{\hspace{2cm}}$

例11. 化簡 $\frac{\sin(-\theta)}{\sin(\pi + \theta)} - \frac{\tan(\frac{3}{2}\pi + \theta)}{\tan(\frac{3}{2}\pi - \theta)} - \frac{\cos(-\theta)}{\sin(\frac{1}{2}\pi + \theta)}$ 得 _____