重　複　組　合

自 n 類不同的事物中，一次任取 m 件(可重複)的方法數，稱為 n 取 m 的重複組合，記作：$\boxed{H_m^n}$。在此，舉一些基本的例子說明其方法數的計算。

題目一: 五個相同的球，分給甲乙丙等三人，每人可兼得(亦可不得)，請問也幾種分法？

分析：

甲	乙	丙
○○○○○		
○○○○	○	
○○○○		○
○○○	○○	
○○○	○	○
○○○		○○
○○	○○○	
○○	○○	○
○○	○	○○
○○		○○○
○	○○○○	
○	○○○	○
○	○○	○○
○	○	○○○
○		○○○○
	○○○○○	
	○○○○	○
	○○○	○○
	○○	○○○
	○	○○○○
		○○○○○

共有 21 種分法。

<u>那麼，如何計算其方法數呢？</u>

可將之視為「<u>五個相同球與(3–1)塊隔板的直線排列</u>」，即 ○○○○○｜｜ 的排列數，所以共有 $\dfrac{[5+(3-1)]!}{5!\,(3-1)!}=\dfrac{7!}{5!\,2!}$，

即 $\boxed{C_5^{5+(3-1)}}$ =21 種分法。

$$H_{5\ (\text{個相同物})}^{3\ (\text{人})}$$
↑分給

說明：因為分到三人手中的每個球皆相同，所以唯一能區別分法應否視為相同的考慮因素，就是在三人手中的**球數**。因此此題中的分法是指甲乙丙三人手中的球個數之相同或不同來說明分法的。

右列的所有分法亦可用個數列之，如下：

甲	乙	丙 (個數)
5	0	0
4	1	0
4	0	1
3	2	0
3	1	1
3	0	2
2	3	0
2	2	1
2	1	2
2	0	3
1	4	0
1	3	1
1	2	2
1	1	3
1	0	4
0	5	0
0	4	1
0	3	2
0	2	3
0	1	4
0	0	5

共有 21 種分法。

題目二: 設方程式 $x_1+x_2+x_3=5$，其中 x_1、x_2、x_3 皆為 <u>0 以上的整數</u>，試問此方程式的<u>非負的整數解</u>之<u>個數</u>為何？

說明：設前例中，甲分得 x_1 個，乙分得 x_2 個，丙分得 x_3 個，則 $x_1+x_2+x_3=5$ 且 x_1、x_2、x_3 皆為 0 以上的整數 (即不是負的整數)， 則其解如下：

x_1	x_2	x_3
5	0	0
4	1	0
4	0	1
3	2	0
3	1	1
3	0	2
2	3	0
2	2	1
2	1	2
2	0	3
1	4	0
1	3	1
1	2	2
1	1	3
1	0	4
0	5	0
0	4	1
0	3	2
0	2	3
0	1	4
0	0	5

共有 21 個不是負的整數解。

$$H_{5\ (\text{總和})}^{3\ (\text{個變元})}$$

題目三: 從三類不同的水果中，一次任取五個，試問有多少種不同的取法？

說明：設第一類水果取出 x_1 個，第二類水果取出 x_2 個，第三類水果取出 x_3 個，則其取法如下：

x_1	x_2	x_3
5	0	0
4	1	0
4	0	1
3	2	0
3	1	1
3	0	2
2	3	0
2	2	1
2	1	2
2	0	3
1	4	0
1	3	1
1	2	2
1	1	3
1	0	4
0	5	0
0	4	1
0	3	2
0	2	3
0	1	4
0	0	5

共有 21 種取法。

依重複組合的定義，此題的取法數為 H_5^3，

由題目一可得 $H_5^3=21=\dfrac{7!}{5!\,2!}=C_5^{5+(3-1)}$

$$H_{5\ (\text{個})}^{3\ (\text{類})} = C_5^{5+(3-1)}$$
↓抽取