前言

PREFACE

提早準備，輕鬆學數學

學生進入高中後，多數學生基礎知識與演算能力均嫌不足，在接受正式高一課程時，銜接上產生很大的困難，所以我們特編輯本書「國中升高中數學銜接教材」，幫助學生在學習高中數學時，能夠順利銜接上。

書中每單元我們都只提供最基本的概念與試題，避免艱深繁瑣的計算與證明，力求學生能了解每一回的基本概念、定義、定理等，並能銜接上高中課程。

教學目標

本書內容主要補足學生的起始行為，不是教完全部試題，以達銜接目的。所以老師教學前可以先了解學生程度，再適時教授適合學生的試題。

內容特色

1. 國三升高一之暑假適用。
2. 每回均對應高中必修課程，必能有效提高學生起點行為，可使教學更流暢。
3. 本書內容經與國中教師討論後才編製完成，所以內容絕對符合目前國中現況。
4. 重點及試題前標示 * ，表示國中課本、習作中未出現，但坊間參考書常出現或高中教師常認為學生已學過之內容及題目，提供給老師參考。

感謝老師們對本書的厚愛，筆者雖已努力追求內容的完整，仍難免有所疏漏，煩請各位先進不吝指教，讓我們有更大的改進空間，謝謝您！

編者　謹識

目次

同學初入高中課程，如果忘記某個概念、定理、定義時，可以翻閱本書並演練本書試題，讓你更順利學習高中數學課程。書末提供簡答以及部分難題詳解，方便同學自我檢測。

國中升高中數學銜接學習對照表

第1回 乘法公式

重點

一、乘法對加法的分配律

1. $a\times(b+c)=a\times b+a\times c$。
2. $(a+b)\times(c+d)=a(c+d)+b(c+d)=ac+ad+bc+bd$。

二、平方公式

1. 和的平方：$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$。
2. 差的平方：$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$。
3. 平方差：$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$。

***三、立方公式**

1. 立方和：$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$。
2. 立方差：$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$。
3. 和的立方：$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$。
4. 差的立方：$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$。

***四、其他**

1. $(x+a)(x+b)(x+c)=x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc$。
2. $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$。

試題 1

試利用 $(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$ 展開下列各式：

(1) $(2x+1)(3x-5)$。

(2) $(3x+2y)(4x-3y)$。

解 (1) $(2x+1)(3x-5)$
$=2x\times3x-2x\times5+1\times3x-1\times5$
$=6x^2-10x+3x-5$
$=6x^2-7x-5$

(2) $(3x+2y)(4x-3y)$
$=3x\times4x-3x\times3y+2y\times4x-2y\times3y$
$=12x^2-9xy+8xy-6y^2$
$=12x^2-xy-6y^2$

試題 2

試利用 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ 展開下列各式：

(1) $(3x+1)^2$。

(2) $(5x+2y)^2$。

解 (1) $(3x+1)^2$
$=(3x)^2+2\times3x\times1+1^2$
$=9x^2+6x+1$

(2) $(5x+2y)^2$
$=(5x)^2+2\times5x\times2y+(2y)^2$
$=25x^2+20xy+4y^2$

試題 3

試利用 $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ 展開下列各式：

(1) $(5x-3y)^2$。 (2) $(3a-b)^2$。

解 (1) $(5x-3y)^2$
$=(5x)^2-2\times 5x\times 3y+(3y)^2$
$=25x^2-30xy+9y^2$

(2) $(3a-b)^2$
$=(3a)^2-2\times 3a\times b+b^2$
$=9a^2-6ab+b^2$

試題 4

試利用 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ 展開下列各式：

(1) $(2x+y)(2x-y)$。 (2) $(2a-b+3)(2a-b-3)$。

解 (1) $(2x+y)(2x-y)$
$=(2x)^2-y^2$
$=4x^2-y^2$

(2) $(2a-b+3)(2a-b-3)$
$=[(2a-b)+3][(2a-b)-3]$
$=(2a-b)^2-3^2$
$=4a^2-4ab+b^2-9$

試題 5

＊試利用“立方和”與“立方差”的公式展開下列各式：

(1) $(x+2y)(x^2-2xy+4y^2)$。 (2) $(x-2)(x^2+2x+4)$。

解 (1) $(x+2y)(x^2-2xy+4y^2)$
$=x^3+(2y)^3$
$=x^3+8y^3$

(2) $(x-2)(x^2+2x+4)$
$=x^3-2^3$
$=x^3-8$

試題 6

＊試利用“和的立方”與“差的立方”展開下列各式：

(1) $(2x+y)^3$。 (2) $(3x-2y)^3$。

解 (1) $(2x+y)^3$
$=(2x)^3+3\times(2x)^2\times y+3\times 2x\times y^2+y^3$
$=8x^3+12x^2y+6xy^2+y^3$

(2) $(3x-2y)^3$
$=(3x)^3-3\times(3x)^2\times 2y+3\times 3x\times(2y)^2-(2y)^3$
$=27x^3-54x^2y+36xy^2-8y^3$

試題 7

＊試展開 $(x+2)(x+3)(x+4)$。

解 $(x+2)(x+3)(x+4)$

$=x^3+(2+3+4)x^2+(2\times3+3\times4+4\times2)x+2\times3\times4$

$=x^3+9x^2+26x+24$

試題 8

＊試展開 $(x+2y-3z)^2$。

解 $(x+2y-3z)^2$

$=[x+2y+(-3z)]^2$

$=x^2+(2y)^2+(-3z)^2+2\times x\times2y+2\times2y\times(-3z)+2\times x\times(-3z)$

$=x^2+4y^2+9z^2+4xy-12yz-6xz$

試題 9

試利用乘法公式求下列各式的值：

(1) 305^2。　(2) 159×161。

＊(3) $(60-2)(60^2+60\times2+2^2)$。　＊(4) 99^3。

解 (1) $305^2=(300+5)^2=300^2+2\times300\times5+5^2$

$=90000+3000+25=93025$

(2) $159\times161=(160-1)\times(160+1)$

$=160^2-1^2=25600-1=25599$

(3) $(60-2)(60^2+60\times2+2^2)=60^3-2^3=216000-8=215992$

(4) $99^3=(100-1)^3$

$=100^3-3\times100^2\times1+3\times100\times1^2-1^3$

$=1000000-30000+300-1$

$=970299$

試題10

＊設 $a+b=5$，$ab=3$，試求下列各式的值：

(1) a^2+b^2。　(2) a^3+b^3。　(3) $(a-b)^2$。

解 (1) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

⇨ $25=a^2+b^2+6$

⇨ $a^2+b^2=19$

(2) $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$

⇨ $5\times(19-3)=a^3+b^3$

⇨ $a^3+b^3=5\times16=80$

(3) $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

$=19-2\times3=13$

第 2 回

因式分解

重點

一、提公因式

1. 從各項提公因式。
2. 分組提公因式。
3. 拆項後分組提公因式。

二、十字交乘法

欲將 x^2+px+q 分解成 $(x+a)(x+b)$ 必須設法找到 a，b 使得 $ab=q$ 且 $a+b=p$，即

$x^2+(a+b)x+ab$

$=x^2+ax+bx+ab$

$=x(x+a)+b(x+a)$

$=(x+a)(x+b)$。

$$\begin{array}{ccc} 1 & \times & a \\ 1 & & b \\ \hline & a+b & \end{array}$$

三、平方公式

1. $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$。
2. $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$。
3. $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$。

＊四、立方公式

1. $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$。
2. $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$。
3. $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$。
4. $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$。

＊五、配平方法

1. $x^2+a^2=x^2\underline{+2ax}+a^2\underline{-2ax}=(x+a)^2-2ax$。
2. $x^2+a^2=x^2\underline{-2ax}+a^2\underline{+2ax}=(x-a)^2+2ax$。

試題 1

因式分解下列各式：(從各項提公因式)

(1) $(x+y)(x+3y)^2-(x+y)^2(x+3y)$。

(2) x^2y-xy^2+3xy。

解 (1) $(x+y)(x+3y)^2-(x+y)^2(x+3y)$

$=(x+y)(x+3y)[(x+3y)-(x+y)]$

$=(x+y)(x+3y)(2y)$

$=2y(x+y)(x+3y)$

(2) $x^2y-xy^2+3xy=xy(x-y+3)$

試題 2

因式分解下列各式：(分組提公因式)

(1) $3a^2-6ax-5ab+10bx$。

(2) $a(b^2-c^2)-c(a^2-b^2)$。

解 (1) $3a^2-6ax-5ab+10bx$
$=(3a^2-6ax)-(5ab-10bx)$
$=3a(a-2x)-5b(a-2x)$
$=(a-2x)(3a-5b)$

(2) $a(b^2-c^2)-c(a^2-b^2)$
$=ab^2-ac^2-a^2c+b^2c$
$=(ab^2+b^2c)-(ac^2+a^2c)$
$=b^2(a+c)-ac(a+c)$
$=(a+c)(b^2-ac)$

試題 3

＊因式分解下列各式：(拆項後分組提公因式)

(1) $x^4-x^3+2x^2-x+1$。

(2) $x^4-x^3-5x^2+4x+4$。

解 (1) $x^4-x^3+2x^2-x+1$
$=(x^4-x^3+x^2)+(x^2-x+1)$
$=x^2(x^2-x+1)+(x^2-x+1)$
$=(x^2-x+1)(x^2+1)$

(2) $x^4-x^3-5x^2+4x+4$
$=(x^4-x^3-x^2)+(-4x^2+4x+4)$
$=x^2(x^2-x-1)-4(x^2-x-1)$
$=(x^2-x-1)(x^2-4)$
$=(x^2-x-1)(x+2)(x-2)$

試題 4

因式分解下列各式：(十字交乘法)

(1) $9x^4+35x^2-4$。

＊(2) x^6-7x^3-8。

解 (1) $9x^4+35x^2-4$
$=(x^2+4)(9x^2-1)$
$=(x^2+4)[(3x)^2-1^2]$
$=(x^2+4)(3x+1)(3x-1)$

$$\begin{array}{ccc} 1 & \times & 4 \\ 9 & & -1 \\ \hline \multicolumn{3}{c}{36-1=35} \end{array}$$

(2) x^6-7x^3-8
$=(x^3+1)(x^3-8)$
$=(x+1)(x^2-x+1)(x-2)(x^2+2x+4)$

$$\begin{array}{ccc} 1 & \times & 1 \\ 1 & & -8 \\ \hline \multicolumn{3}{c}{1-8=-7} \end{array}$$

試題 5

因式分解下列各式：(十字交乘法)

(1) $15(x-y)^2+(x-y)-2$。

(2) $(a+b)^2-5(a^2-b^2)+4(a-b)^2$。

解 (1) $15(x-y)^2+(x-y)-2$
$=[3(x-y)-1][5(x-y)+2]$
$=(3x-3y-1)(5x-5y+2)$

$$\begin{array}{ccc} 3 & \times & -1 \\ 5 & & 2 \\ \hline \multicolumn{3}{c}{-5+6=1} \end{array}$$

(2) $(a+b)^2-5(a^2-b^2)+4(a-b)^2$
$=(a+b)^2-5(a+b)(a-b)+4(a-b)^2$
$=[(a+b)-(a-b)][(a+b)-4(a-b)]$
$=2b(-3a+5b)$

$$\begin{array}{ccc} 1 & \times & -1 \\ 1 & & -4 \\ \hline \multicolumn{3}{c}{-1-4=-5} \end{array}$$

試題 6

因式分解下列各式：（平方公式）

(1) $4x^2+12xy+9y^2$。

(2) $(x+3y)^2-6(x+3y)(2x-y)+9(2x-y)^2$。

解 (1) $4x^2+12xy+9y^2$
$=(2x)^2+2\times2x\times3y+(3y)^2$
$=(2x+3y)^2$

(2) $(x+3y)^2-6(x+3y)(2x-y)+9(2x-y)^2$
$=[(x+3y)-3(2x-y)]^2$
$=(x+3y-6x+3y)^2$
$=(-5x+6y)^2$
$=(5x-6y)^2$

試題 7

因式分解下列各式：（平方公式）

(1) x^4-1。

(2) $a^2-b^2-c^2+2bc$。

解 (1) x^4-1
$=(x^2)^2-1$
$=(x^2+1)(x^2-1)$
$=(x^2+1)(x+1)(x-1)$

(2) $a^2-b^2-c^2+2bc$
$=a^2-(b^2-2bc+c^2)$
$=a^2-(b-c)^2$
$=[a+(b-c)][a-(b-c)]$
$=(a+b-c)(a-b+c)$

試題 8

＊因式分解下列各式：（立方公式）

(1) $27x^3+8$。

(2) x^3-64y^3。

解 (1) $27x^3+8$
$=(3x)^3+2^3$
$=(3x+2)[(3x)^2-3x\times2+2^2]$
$=(3x+2)(9x^2-6x+4)$

(2) x^3-64y^3
$=x^3-(4y)^3$
$=(x-4y)[x^2+x\times4y+(4y)^2]$
$=(x-4y)(x^2+4xy+16y^2)$

試題 9

＊因式分解下列各式：（立方公式）

(1) $x^3+6x^2+12x+8$。

(2) $8x^3-12x^2y+6xy^2-y^3$。

解 (1) $x^3+6x^2+12x+8$
$=x^3+3\times x^2\times2+3\times x\times2^2+2^3$
$=(x+2)^3$

(2) $8x^3-12x^2y+6xy^2-y^3$
$=(2x)^3-3\times(2x)^2\times y+3\times2x\times y^2-y^3$
$=(2x-y)^3$

試題 10

＊因式分解下列各式：（配平方法）

(1) $9x^4-7x^2y^2+y^4$。

(2) $a^4+a^2b^2+b^4$。

解 (1) $9x^4-7x^2y^2+y^4$
$=9x^4-6x^2y^2+y^4-x^2y^2$
$=(3x^2-y^2)^2-(xy)^2$
$=(3x^2-y^2+xy)(3x^2-y^2-xy)$
$=(3x^2+xy-y^2)(3x^2-xy-y^2)$

(2) $a^4+a^2b^2+b^4$
$=a^4+2a^2b^2+b^4-a^2b^2$
$=(a^2+b^2)^2-(ab)^2$
$=(a^2+b^2+ab)(a^2+b^2-ab)$
$=(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$

第 3 回

平方根與立方根

重點

一、平方根的意義與性質

1. 若 $x^2=a$，則 x 稱為 a 的平方根。

   例：$\because 3^2=9$，$(-3)^2=9$

   $\therefore 9$ 的平方根為 3 與 -3。

2. 每個正數 a 恰有 2 個平方根，以 $\sqrt{a}$ 表示正的平方根。

   例：$\sqrt{4}=2$，$\sqrt{9}=3$。

3. 設 $a>0$，$b>0$，則：

   (1) $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$。　(2) $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$。

   (3) $\sqrt{a^2}=|a|$，$(\sqrt{a})^2=a$。

＊二、立方根的意義與性質

1. 若 $x^3=a$，則 x 稱為 a 的立方根。

   例：$\because 2^3=8$　$\therefore 2$ 是 8 的立方根。

   $\because (-2)^3=-8$　$\therefore -2$ 是 -8 的立方根。

2. 每個實數 a 恰有 1 個實數的立方根，以 $\sqrt[3]{a}$ 表示這個實數的立方根。

   例：$\sqrt[3]{8}=2$，$\sqrt[3]{-8}=-2$。

3. 設 $a>0$，$b>0$，則：

   (1) $\sqrt[3]{a}\times\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{ab}$。　(2) $\dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}=\sqrt[3]{\dfrac{a}{b}}$。

   (3) $\sqrt[3]{a^3}=a$，$(\sqrt[3]{a})^3=a$。

三、平方根根式分母的有理化

兩個根式的乘積為有理數，則這兩個根式互稱為有理化因式，其常見的有理化因式如下：

1. $\sqrt{x}$ 的有理化因式為 $\sqrt{x}$。
2. $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ 的有理化因式為 $\sqrt{x}-\sqrt{y}$。
3. $\sqrt{x}-\sqrt{y}$ 的有理化因式為 $\sqrt{x}+\sqrt{y}$。

＊四、雙重根式的化簡

若 a，b 為兩個非負的數，且 $a\geq b$，

$\because (\sqrt{a}\pm\sqrt{b})^2=(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2\pm 2\sqrt{ab}$

$=a+b\pm 2\sqrt{ab}$

$\therefore \sqrt{a+b\pm 2\sqrt{ab}}=\sqrt{(\sqrt{a}\pm\sqrt{b})^2}=\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$。

因此，若 $\sqrt{x\pm 2\sqrt{y}}=\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$（其中 $a\geq b$），則 $x=a+b$，$y=ab$。

試題 1

試將下列各式化為最簡根式：

(1) $\sqrt{1350}$。

＊(2) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{4}}$。

解

(1) $\sqrt{1350}=\sqrt{2\times3^3\times5^2}$
$=\sqrt{2}\times\sqrt{3^3}\times\sqrt{5^2}$
$=\sqrt{2}\times3\sqrt{3}\times5$
$=15\sqrt{6}$

(2) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{4}}=\dfrac{\sqrt[3]{1}}{\sqrt[3]{4}}=\dfrac{1\times\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{4}\times\sqrt[3]{2}}$
$=\dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{8}}=\dfrac{\sqrt[3]{2}}{2}$

試題 2

計算下列各式，並將結果化為最簡根式：

(1) $\sqrt{21}\div\sqrt{\dfrac{14}{25}}\times\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$。

(2) $\sqrt{\dfrac{10}{21}}\times\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{12}}\div\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{14}}$。

解

(1) $\sqrt{21}\div\sqrt{\dfrac{14}{25}}\times\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$
$=\sqrt{21}\times\sqrt{\dfrac{25}{14}}\times\sqrt{\dfrac{2}{5}}$
$=\sqrt{21\times\dfrac{25}{14}\times\dfrac{2}{5}}$
$=\sqrt{15}$

(2) $\sqrt{\dfrac{10}{21}}\times\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{12}}\div\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{14}}$
$=\sqrt{\dfrac{10}{21}}\times\sqrt{\dfrac{7}{12}}\times\sqrt{\dfrac{14}{5}}$
$=\sqrt{\dfrac{10}{21}\times\dfrac{7}{12}\times\dfrac{14}{5}}$
$=\sqrt{\dfrac{7}{9}}=\dfrac{\sqrt{7}}{3}$

試題 3

＊計算下列各式，並將結果化為最簡根式：

(1) $\sqrt[3]{3}\times\sqrt[3]{4}$。

(2) $\sqrt[3]{\dfrac{5}{4}}\div\sqrt[3]{\dfrac{16}{25}}$。

解

(1) $\sqrt[3]{3}\times\sqrt[3]{4}$
$=\sqrt[3]{3\times4}$
$=\sqrt[3]{12}$

(2) $\sqrt[3]{\dfrac{5}{4}}\div\sqrt[3]{\dfrac{16}{25}}$
$=\sqrt[3]{\dfrac{5}{4}\div\dfrac{16}{25}}=\sqrt[3]{\dfrac{5}{4}\times\dfrac{25}{16}}$
$=\sqrt[3]{\dfrac{125}{64}}=\dfrac{5}{4}$

試題 4

化簡下列各式：

(1) $5\sqrt{18}-7\sqrt{8}-4\sqrt{20}+2\sqrt{45}$。

(2) $(4\sqrt{5}-2\sqrt{6})(\sqrt{5}+3\sqrt{6})$。

解

(1) $5\sqrt{18}-7\sqrt{8}-4\sqrt{20}+2\sqrt{45}$
$=15\sqrt{2}-14\sqrt{2}-8\sqrt{5}+6\sqrt{5}$
$=\sqrt{2}-2\sqrt{5}$

(2) $(4\sqrt{5}-2\sqrt{6})(\sqrt{5}+3\sqrt{6})$
$=20+12\sqrt{30}-2\sqrt{30}-36$
$=-16+10\sqrt{30}$

試題 5

化簡下列各式為最簡根式：

(1) $\dfrac{2}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$。

(2) $\dfrac{1}{3-\sqrt{2}}$。

解

(1) $\dfrac{2}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$

$=\dfrac{2\times(\sqrt{7}-\sqrt{5})}{(\sqrt{7}+\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5})}$

$=\dfrac{2(\sqrt{7}-\sqrt{5})}{7-5}$

$=\sqrt{7}-\sqrt{5}$

(2) $\dfrac{1}{3-\sqrt{2}}$

$=\dfrac{1\times(3+\sqrt{2})}{(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})}$

$=\dfrac{3+\sqrt{2}}{9-2}$

$=\dfrac{3+\sqrt{2}}{7}$

試題 6

將 $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}-\dfrac{2}{\sqrt{3}+1}$ 化為最簡根式。

解

$\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}-\dfrac{2}{\sqrt{3}+1}=\dfrac{1\times(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}-\dfrac{2\times(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}$

$=\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2}-\dfrac{2\times(\sqrt{3}-1)}{3-1}$

$=(\sqrt{3}-\sqrt{2})-(\sqrt{3}-1)$

$=\sqrt{3}-\sqrt{2}-\sqrt{3}+1$

$=1-\sqrt{2}$

試題 7

將 $\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}-\dfrac{2}{\sqrt{5}+1}+\dfrac{3}{\sqrt{7}+1}$ 化為最簡根式。

解

$\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}-\dfrac{2}{\sqrt{5}+1}+\dfrac{3}{\sqrt{7}+1}$

$=\dfrac{1\times(\sqrt{5}-\sqrt{7})}{(\sqrt{5}+\sqrt{7})(\sqrt{5}-\sqrt{7})}-\dfrac{2\times(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)}+\dfrac{3\times(\sqrt{7}-1)}{(\sqrt{7}+1)(\sqrt{7}-1)}$

$=\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{7}}{5-7}-\dfrac{2(\sqrt{5}-1)}{5-1}+\dfrac{3(\sqrt{7}-1)}{7-1}$

$=-\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{7}}{2}-\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}+\dfrac{\sqrt{7}-1}{2}$

$=\dfrac{-\sqrt{5}+\sqrt{7}-\sqrt{5}+1+\sqrt{7}-1}{2}$

$=\sqrt{7}-\sqrt{5}$

試題 8

＊將下列各雙重根式化為最簡根式：

(1) $\sqrt{5+2\sqrt{6}}$。　(2) $\sqrt{17-12\sqrt{2}}$。

解 (1) $\sqrt{5+2\sqrt{6}}$
$=\sqrt{(3+2)+2\sqrt{3\times2}}$
$=\sqrt{3}+\sqrt{2}$

(2) $\sqrt{17-12\sqrt{2}}$
$=\sqrt{17-2\sqrt{72}}$
$=\sqrt{(9+8)-2\sqrt{9\times8}}$
$=\sqrt{9}-\sqrt{8}$
$=3-2\sqrt{2}$

試題 9

＊設 $a=\sqrt{8}+\sqrt{3}$，$b=\sqrt{7}+\sqrt{4}$，試比較 a，b 之大小關係。

解 $\because a^2=(\sqrt{8}+\sqrt{3})^2=11+2\sqrt{24}$
$b^2=(\sqrt{7}+\sqrt{4})^2=11+2\sqrt{28}$
$\because \sqrt{24}<\sqrt{28}$　$\therefore a^2<b^2$
故 $a<b$

試題10

＊試求 $\sqrt{198\frac{1}{196}}$ 之值。

解 $\sqrt{198\frac{1}{196}}=\sqrt{196+2+\frac{1}{196}}$
$=\sqrt{14^2+2\times14\times\frac{1}{14}+\left(\frac{1}{14}\right)^2}$
$=\sqrt{\left(14+\frac{1}{14}\right)^2}$
$=14+\frac{1}{14}$
$=14\frac{1}{14}$

實力檢測 1

年　月　日　　分

範圍：1～3 回複習

計算題（每題 10 分，若有 2 小題，每小題 5 分，共 100 分）

1. 試利用乘法公式，計算下列各式的值：

(1) 298^2。　　(2) 897×903。

解 (1) $298^2=(300-2)^2$
$=300^2-2\times300\times2+2^2$
$=90000-1200+4$
$=88804$

(2) $897\times903=(900-3)(900+3)$
$=900^2-3^2$
$=810000-9$
$=809991$

2. 因式分解下列各式：

(1) $(a+b)^2-3(a+b)-4$。　　(2) $(4x^2-1)(2x+1)+(2x-1)(x^2+3x+1)$。

解 (1) $(a+b)^2-3(a+b)-4$
$=(a+b+1)(a+b-4)$

(2) $(4x^2-1)(2x+1)+(2x-1)(x^2+3x+1)$
$=(2x+1)(2x-1)(2x+1)+(2x-1)(x^2+3x+1)$
$=(2x-1)[(2x+1)^2+(x^2+3x+1)]$
$=(2x-1)(4x^2+4x+1+x^2+3x+1)$
$=(2x-1)(5x^2+7x+2)$
$=(2x-1)(x+1)(5x+2)$

3. 因式分解下列各式：

(1) $(2x+1)^3(x-3)-(2x+1)(x-3)^3$。　　(2) $x^3-5x^2-9x+45$。

解 (1) $(2x+1)^3(x-3)-(2x+1)(x-3)^3$
$=(2x+1)(x-3)[(2x+1)^2-(x-3)^2]$
$=(2x+1)(x-3)[(2x+1)+(x-3)][(2x+1)-(x-3)]$
$=(2x+1)(x-3)(3x-2)(x+4)$

(2) $x^3-5x^2-9x+45$
$=x^2(x-5)-9(x-5)=(x-5)(x^2-9)$
$=(x-5)(x+3)(x-3)$

＊4. 已知 $a+b=8$，$ab=15$，試求下列各式的值：

(1) a^2+b^2。　　(2) $a-b$。

解 (1) $\because (a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
$\therefore a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$
$=8^2-2\times15=34$

(2) $\because (a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
$=34-2\times15=4$
$\therefore a-b=\pm2$

5. 試求下列各式的值：

(1) $\sqrt{39.69}$。 (2) $\sqrt{39\frac{1}{16}}$。

解 (1) $\sqrt{39.69}=\sqrt{\frac{3969}{100}}=\sqrt{\frac{3^4\times7^2}{10^2}}$
$=\sqrt{\frac{(3^2\times7)^2}{10^2}}$
$=\frac{63}{10}$

(2) $\sqrt{39\frac{1}{16}}=\sqrt{\frac{625}{16}}$
$=\sqrt{\left(\frac{25}{4}\right)^2}$
$=\frac{25}{4}$

6. 計算下列各式，並將結果化為最簡根式：

(1) $3\sqrt{8}+\sqrt{27}+\sqrt{18}-\sqrt{48}$。 (2) $(1-\sqrt{6})^2-(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2$。

解 (1) $3\sqrt{8}+\sqrt{27}+\sqrt{18}-\sqrt{48}$
$=6\sqrt{2}+3\sqrt{3}+3\sqrt{2}-4\sqrt{3}$
$=9\sqrt{2}-\sqrt{3}$

(2) $(1-\sqrt{6})^2-(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2$
$=(1-2\sqrt{6}+6)-(2-2\sqrt{6}+3)$
$=7-2\sqrt{6}-5+2\sqrt{6}$
$=2$

＊7. 若 $a+\frac{1}{a}=4$，試求下列各式的值：

(1) $a^2+\frac{1}{a^2}$。 (2) $a^3+\frac{1}{a^3}$。

解 (1) $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2=a^2+2\times a\times\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}$

⇨ $4^2=a^2+\frac{1}{a^2}+2$

⇨ $a^2+\frac{1}{a^2}=16-2=14$

(2) $\left(a+\frac{1}{a}\right)^3=a^3+3a^2\times\frac{1}{a}+3\times a\times\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}$

⇨ $4^3=a^3+\frac{1}{a^3}+3\left(a+\frac{1}{a}\right)$

⇨ $a^3+\frac{1}{a^3}=64-3\times4=52$

8. 若 $x=\sqrt{13}-3$，試求 x^2+6x-8 之值。

解 x^2+6x-8

$=(\sqrt{13}-3)^2+6(\sqrt{13}-3)-8$

$=13-6\sqrt{13}+9+6\sqrt{13}-18-8$

$=-4$

9. 化簡 $\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}-\dfrac{2}{\sqrt{11}-3}+\dfrac{8}{\sqrt{11}+\sqrt{3}}$。

解 $\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}-\dfrac{2}{\sqrt{11}-3}+\dfrac{8}{\sqrt{11}+\sqrt{3}}$

$=\dfrac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}-\dfrac{2(\sqrt{11}+3)}{(\sqrt{11}-3)(\sqrt{11}+3)}+\dfrac{8(\sqrt{11}-\sqrt{3})}{(\sqrt{11}+\sqrt{3})(\sqrt{11}-\sqrt{3})}$

$=(2+\sqrt{3})-\dfrac{2(\sqrt{11}+3)}{2}+\dfrac{8(\sqrt{11}-\sqrt{3})}{8}$

$=(2+\sqrt{3})-(\sqrt{11}+3)+(\sqrt{11}-\sqrt{3})$

$=2+\sqrt{3}-\sqrt{11}-3+\sqrt{11}-\sqrt{3}$

$=-1$

10. 若 $3x^2-13x+m$ 可因式分解成 $(3x+a)(x-5)$，試求數對 (m, a)。

解 $(3x+a)(x-5)$

$=3x^2+ax-15x-5a$

$=3x^2+(a-15)x-5a$

比較係數得 $\begin{cases} a-15=-13 \\ m=-5a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ m=-10 \end{cases}$

故數對 $(m, a)=(-10, 2)$

第 4 回

方程式

重點

一、一元一次方程式（配合第一冊 1-2 研習）

1. 一元一次方程式：

   一個方程式經過多項式化簡後，僅含有一種未知數，且未知數的次數都是一次，這種方程式稱為一元一次方程式，其一般式為 $ax+b=0$，其中 a，b 為實數且 $a\neq 0$。

2. 方程式 $ax+b=0$ 之解：

   (1) 若 $a\neq 0$ 時，則 $x=-\dfrac{b}{a}$，此時方程式恰有一解。

   (2) 若 $a=0$ 且 $b=0$ 時，則 x 為任意實數，此時方程式有無限多解。

   (3) 若 $a=0$ 且 $b\neq 0$ 時，則沒有任何實數滿足方程式，此時方程式無解。

二、二元一次方程式（配合第三冊 3-4 研習）

1. 形如：$ax+by+c=0$，其中 a，b 為實數且 a，b 不可同時為 0，而其圖形為一直線。

2. 二元一次聯立方程式，可利用加減消去法或代入消去法來解題。

＊ 3. 二元一次聯立方程式 $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ 之解即為兩直線的交點坐標。

   (1) 若 $\dfrac{a_1}{a_2}\neq\dfrac{b_1}{b_2}$ ⇨ 兩直線交於一點，方程組恰有一組解。

   (2) 若 $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}$ ⇨ 兩直線重合，方程組有無限多組解。

   (3) 若 $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}\neq\dfrac{c_1}{c_2}$ ⇨ 兩直線平行，方程組無解。

三、絕對值方程式（配合第一冊 1-2 研習）

＊ 1. 絕對值方程式：

   若方程式中含有未知數在絕對值中的方程式，我們稱為絕對值方程式。

   例：$|x|=3$，$|x-1|=5$，$|3x+2|=6$，……。

2. $A(a)$，$B(b)$，則 A，B 兩點間的距離為 $\overline{AB}=|a-b|$。

3. (1) 若 $x\geq 0$，則 $|x|=x$。

   (2) 若 $x<0$，則 $|x|=-x$。

＊四、分式方程式（配合第三冊 3-4 研習）

分式方程式：若方程式中含有未知數在分母的分式，我們稱為分式方程式。

例：$\dfrac{3}{x}=1$，$y+\dfrac{1}{y}=3$，$\dfrac{3}{x-1}=2$，……。

翰林用心 教師用 精益求精

試題 1

試解下列各方程式：

(1) $2x+5=7$。　(2) $2x+5+3=8+2x$。　(3) $2x+5=6+2x$。

解 (1) $2x+5=7$
⇨ $2x=7-5$
⇨ $2x=2$
$\therefore x=1$

(2) $2x+5+3=8+2x$
⇨ $2x-2x=8-5-3$
$\therefore 0x=0$
故方程式有無限多解

(3) $2x+5=6+2x$
⇨ $2x-2x=6-5$
$\therefore 0x=1$
故方程式無解

試題 2

試解下列各方程式：

(1) $\dfrac{x+7}{4}+\dfrac{2x-3}{6}=\dfrac{7}{12}x+\dfrac{5}{4}$。　(2) $\dfrac{x-5}{3}-\dfrac{3x-1}{4}=\dfrac{-5x+7}{12}$。

解 (1) $\dfrac{x+7}{4}+\dfrac{2x-3}{6}=\dfrac{7}{12}x+\dfrac{5}{4}$
⇨ $3(x+7)+2(2x-3)=7x+3\times5$
⇨ $3x+21+4x-6=7x+15$
⇨ $3x+4x-7x=-21+6+15$
⇨ $0x=0$
故方程式有無限多解

(2) $\dfrac{x-5}{3}-\dfrac{3x-1}{4}=\dfrac{-5x+7}{12}$
⇨ $4(x-5)-3(3x-1)=-5x+7$
⇨ $4x-20-9x+3=-5x+7$
⇨ $4x-9x+5x=20-3+7$
⇨ $0x=24$
故方程式無解

試題 3

某超商舉辦飲料特價優惠「每買 2 罐相同價位的飲料，第 2 罐打 6 折」，今琳珺買了 2 罐相同價位的飲料和一份 10 元的報紙，共付款 50 元，則飲料每罐______元。

解 設飲料每罐 x 元
則 $x+0.6x+10=50$
⇨ $1.6x=40$
⇨ $x=25$
故飲料每罐 25 元

試題 4

試解下列各二元一次聯立方程式：

(1) $\begin{cases} x+9y=11 \\ 4x-5y=3 \end{cases}$。　(2) $\begin{cases} 5x-2y=-1 \\ 19x-8y=-7 \end{cases}$。

解 (1) 利用代入消去法解 $\begin{cases} x+9y=11 \cdots\cdots ① \\ 4x-5y=3 \cdots\cdots ② \end{cases}$
由①，$x=11-9y$ 代入②得 $4(11-9y)-5y=3$
⇨ $44-36y-5y=3$ ⇨ $-41y=-41$
⇨ $y=1$ 代入①得 $x=2$
故解為 $x=2$，$y=1$

(2) 利用加減消去法解
$\begin{cases} 5x-2y=-1 \cdots\cdots ① \\ 19x-8y=-7 \cdots\cdots ② \end{cases}$
①$\times4-$②得 $x=3$
代入①得 $15-2y=-1$ ⇨ $y=8$
故解為 $x=3$，$y=8$

試題 5

某電信公司的通話費每秒 0.2 元，十月分舉辦「打 x 秒，送 y 秒」的促銷活動。已知贈送的秒數為通話秒數的 $\dfrac{1}{10}$，且可抵當月分的通話費，若信誠十月分的通話費為 198 元，則他十月分的通話時間是______秒。

解
$$\begin{cases} y=\dfrac{1}{10}x \cdots\cdots\text{①} \\ 0.2x-0.2y=198 \cdots\cdots\text{②} \end{cases}$$

由①×10，②×5 得 $\begin{cases} x-10y=0 \cdots\cdots\text{③} \\ x-y=990 \cdots\cdots\text{④} \end{cases}$

由④－③得 $9y=990$ ⇨ $y=110$ 代入①得 $x=1100$

故信誠十月分的通話時間是 1100 秒

試題 6

下列各聯立方程式中，何者為兩平行直線？

(A) $\begin{cases} x+2y=5 \\ 3x+6y=8 \end{cases}$ (B) $\begin{cases} 3x+y=2 \\ x+3y=4 \end{cases}$ (C) $\begin{cases} 5x-y=3 \\ 10x-2y=6 \end{cases}$ (D) $\begin{cases} 2x-y=4 \\ x-\dfrac{1}{2}y=8 \end{cases}$。

解 (A) ○：$\because \dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{6}\neq\dfrac{5}{8}$ $\therefore$表兩平行直線　(B) ×：$\because \dfrac{3}{1}\neq\dfrac{1}{3}$ $\therefore$表交於一點的兩直線

(C) ×：$\because \dfrac{5}{10}=\dfrac{-1}{-2}=\dfrac{3}{6}$ $\therefore$表兩重合直線　(D) ○：$\because \dfrac{2}{1}=\dfrac{-1}{-\dfrac{1}{2}}\neq\dfrac{4}{8}$ $\therefore$表兩平行直線

故選(A)(D)

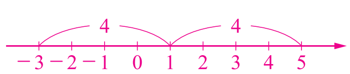
試題 7

* 在數線上解釋 $|x-1|=4$ 的意義，並標示 x 所在之位置。

解 若 $x-1\geq 0$，則 $x-1=4$，故 $x=5$

若 $x-1<0$，則 $x-1=-4$，故 $x=-3$

即 $x=5$ 或 -3



$|x-1|=4$ 之解為 $x=5$ 或 -3，表此兩點到 1 之距離皆為 4

試題 8

＊試求下列各方程式的解：

(1) $|3x+2|=6$。

(2) $3|x|+2=6$。

解 (1) $|3x+2|=6$

⇨ $3x+2=6$ 或 $3x+2=-6$

⇨ $3x=4$ 或 $3x=-8$

$\therefore x=\frac{4}{3}$ 或 $x=-\frac{8}{3}$

(2) $3|x|+2=6$

⇨ $3|x|=4$ ⇨ $|x|=\frac{4}{3}$

$\therefore x=\frac{4}{3}$ 或 $x=-\frac{4}{3}$

試題 9

＊試解下列各分式方程式：

(1) $\frac{x}{2x-1}=\frac{3}{5}$。

(2) $\frac{4}{x+1}+\frac{2}{x-2}=3$。

解 (1) $\frac{x}{2x-1}=\frac{3}{5}$

將等式兩邊同時乘以 $5(2x-1)$

得 $5x=3(2x-1)$ ⇨ $5x=6x-3$

$\therefore x=3$

檢驗：將 $x=3$ 代入原式不使分母為 0，故為其解

(2) 在等式兩邊同時乘以 $(x+1)(x-2)$

得 $4(x-2)+2(x+1)=3(x+1)(x-2)$

⇨ $4x-8+2x+2=3x^2+3x-6x-6$

⇨ $3x^2-9x=0$ ⇨ $x(x-3)=0$

⇨ $x=0$ 或 $x=3$ 代入均不使分母為 0

故方程式的解為 $x=0$ 或 $x=3$

試題10

＊試解下列各分式方程組：

(1) $\begin{cases} \frac{4}{x}+\frac{1}{y}=1 \cdots\cdots ① \\ \frac{2}{x}-\frac{3}{y}=4 \cdots\cdots ② \end{cases}$

(2) $\begin{cases} \frac{3}{x}+\frac{1}{2y}=2 \\ \frac{9}{2x}-\frac{5}{4y}=-1 \end{cases}$

解 (1) ①×3＋②得 $\frac{14}{x}=7$ ⇨ $7x=14$ ⇨ $x=2$

代入①得 $\frac{4}{2}+\frac{1}{y}=1$ ⇨ $\frac{1}{y}=-1$

$\therefore y=-1$

故方程組之解為 $x=2$，$y=-1$

(2) 令 $\frac{1}{x}=a$，$\frac{1}{y}=b$ 得

$\begin{cases} 3a+\frac{1}{2}b=2 \\ \frac{9}{2}a-\frac{5}{4}b=-1 \end{cases}$ ⇨ $\begin{cases} 6a+b=4 \cdots\cdots ① \\ 18a-5b=-4 \cdots\cdots ② \end{cases}$

①×5＋②得 $48a=16$ ⇨ $a=\frac{1}{3}$

代入①得 $b=2$

⇨ $x=\frac{1}{a}=3$，$y=\frac{1}{b}=\frac{1}{2}$

故方程組之解為 $x=3$，$y=\frac{1}{2}$

第 5 回

一元二次方程式

重點

一、一元二次方程式的意義

若一個方程式只含有一種未知數，且未知數的最高次數是二次時，則稱此方程式為一元二次方程式，即形如 $ax^2+bx+c=0$，其中 $a\neq 0$，a，b 為實數。

二、一元二次方程式之解

1. 因式分解法。
2. 配方法。
3. 公式法。

三、一元二次方程式之公式解

$ax^2+bx+c=0$ 的兩根為 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，其中 b^2-4ac 稱為判別式，常以 D 表示。

1. 若 $b^2-4ac>0$，則方程式的兩根為相異實根。
2. 若 $b^2-4ac=0$，則方程式的兩根為相等實根。
3. 若 $b^2-4ac<0$，則方程式沒有實根。

＊四、一元二次方程式之根與係數的關係

1. 若 α、β 為一元二次方程式的兩根，則原方程式為 $(x-\alpha)(x-\beta)=0$
   ⇨ $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$，即原方程式為 x^2-(兩根和)$x+$(兩根積)$=0$
2. 若一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的兩根為 α、β，則 $\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$，$\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$。

試題 1

試用“因式分解法”解下列各一元二次方程式：

(1) $(2x+1)^2=19^2$。(平方差公式)　(2) $3x^2+11x+6=0$。(十字交乘法)

(3) $5x^2+3x-14=0$。(十字交乘法)

解 (1) $(2x+1)^2=19^2$

⇨ $(2x+1)^2-19^2=0$ ⇨ $[(2x+1)+19][(2x+1)-19]=0$

⇨ $(2x+20)(2x-18)=0$

⇨ $2x+20=0$ 或 $2x-18=0$

⇨ $x=-10$ 或 $x=9$

(2) $3x^2+11x+6=0$

⇨ $(x+3)(3x+2)=0$

⇨ $x=-3$ 或 $x=-\dfrac{2}{3}$

$$\begin{array}{ccc} 1 & \times & 3 \\ 3 & & 2 \\ \hline \multicolumn{3}{c}{2+9=11} \end{array}$$

(3) $5x^2+3x-14=0$

⇨ $(x+2)(5x-7)=0$

⇨ $x=-2$ 或 $x=\dfrac{7}{5}$

$$\begin{array}{ccc} 1 & \times & 2 \\ 5 & & -7 \\ \hline \multicolumn{3}{c}{-7+10=3} \end{array}$$

試題 2

試利用"配方法"解下列各一元二次方程式：

(1) $x^2+8x+3=0$。（二次項係數為 1）　(2) $3x^2-6x+2=0$。（二次項係數不為 1）

(3) $x^2+6x+25=0$。（無平方根）

解 (1) $x^2+8x+3=0 \Rightarrow x^2+8x=-3$

$\Rightarrow x^2+8x+4^2=-3+4^2$

$\Rightarrow (x+4)^2=13 \Rightarrow x+4=\pm\sqrt{13}$

$\Rightarrow x=-4\pm\sqrt{13}$

(2) $3x^2-6x+2=0 \Rightarrow x^2-2x+\dfrac{2}{3}=0 \Rightarrow x^2-2x=-\dfrac{2}{3} \Rightarrow x^2-2x+1=-\dfrac{2}{3}+1$

$\Rightarrow (x-1)^2=\dfrac{1}{3} \Rightarrow x-1=\pm\sqrt{\dfrac{1}{3}} \Rightarrow x-1=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x=1\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

(3) $x^2+6x+25=0 \Rightarrow x^2+6x=-25 \Rightarrow x^2+6x+9=-25+9$

$\Rightarrow (x+3)^2=-16<0$

∵負數沒有平方根　∴此方程式無解

試題 3

試利用"公式解"解下列各一元二次方程式：

(1) $3x^2-2x-4=0$。（$D>0$）　(2) $9x^2+6x+1=0$。（$D=0$）

(3) $4x^2-8x+5=0$。（$D<0$）

解 (1) $3x^2-2x-4=0$，令 $a=3$，$b=-2$，$c=-4$

得 $D=b^2-4ac=(-2)^2-4\times3\times(-4)=52>0$

故 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\dfrac{2\pm\sqrt{52}}{6}=\dfrac{2\pm2\sqrt{13}}{6}=\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{3}$

(2) $9x^2+6x+1=0$，令 $a=9$，$b=6$，$c=1$

得 $D=b^2-4ac=6^2-4\times9\times1=0$

故 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\dfrac{-6\pm\sqrt{0}}{18}=-\dfrac{1}{3}$（重根）

(3) $4x^2-8x+5=0$，令 $a=4$，$b=-8$，$c=5$

得 $D=b^2-4ac=(-8)^2-4\times4\times5=-16<0$

∴方程式 $4x^2-8x+5=0$ 無解

試題 4

下列各一元二次方程式何者為兩相異實根？

(A) $x^2-7x+8=0$　(B) $2x^2-3x+6=0$　(C) $21x^2+3x-4=0$　(D) $x^2-6x+9=0$。

解 (A) ○：令 $a=1$，$b=-7$，$c=8 \Rightarrow D=b^2-4ac=(-7)^2-4\times1\times8=49-32=17>0$

為兩相異實根

(B) ×：令 $a=2$，$b=-3$，$c=6 \Rightarrow D=b^2-4ac=(-3)^2-4\times2\times6=9-48=-39<0$

為沒有實根

(C) ○：令 $a=21$，$b=3$，$c=-4 \Rightarrow D=b^2-4ac=3^2-4\times21\times(-4)=9+336=345>0$

為兩相異實根

(D) ×：令 $a=1$，$b=-6$，$c=9 \Rightarrow D=b^2-4ac=(-6)^2-4\times1\times9=36-36=0$

為兩相等實根

故選(A)(C)

試題 5

若 $x^2+(k+2)x+(2k+1)=0$ 的兩根相等，則 k 之值為______。

解 令 $a=1$，$b=k+2$，$c=2k+1$

∵原方程式兩根相等

∴$b^2-4ac=0$

⇨ $(k+2)^2-4\times1\times(2k+1)=0$

⇨ $k^2+4k+4-8k-4=0$

⇨ $k^2-4k=0$

⇨ $k(k-4)=0$

⇨ $k=0$ 或 $k=4$

試題 6

若一元二次方程式 $2x^2+3x+k=0$ 有兩相異實根，則 k 之範圍為______。

解 ∵$2x^2+3x+k=0$ 有兩相異實根

∴判別式 $D=3^2-4\times2\times k>0$

⇨ $9-8k>0$

⇨ $8k<9$

⇨ $k<\dfrac{9}{8}$

試題 7

＊設 $x^2+4x-9=0$ 之兩根為 α、β，則：

(1) $\alpha^2+\beta^2=$______。

(2) $\alpha^3+\beta^3=$______。

(3) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=$______。

解 由根與係數的關係知

$\alpha+\beta=-4$，$\alpha\beta=-9$

(1) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$
$=(-4)^2-2\times(-9)$
$=16+18=34$

(2) $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$
$=(-4)^3-3\times(-9)\times(-4)$
$=-64-108=-172$

(3) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\dfrac{-4}{-9}=\dfrac{4}{9}$

試題 8

＊試解分式方程式 $\dfrac{4}{x}+\dfrac{3}{x-1}=5$。

解　在等式兩邊同時乘以 $x(x-1)$

得 $4(x-1)+3x=5x(x-1)$

⇨ $4x-4+3x=5x^2-5x$

⇨ $5x^2-12x+4=0$

⇨ $(x-2)(5x-2)=0$

⇨ $x=2$ 或 $x=\dfrac{2}{5}$ 代入均不使分母為 0

故方程式的解為 $x=2$ 或 $x=\dfrac{2}{5}$

試題 9

某人用竹筷去量一張長方形的紙，發現紙的長度比竹筷的兩倍長少 1 公分，寬比竹筷長多 2 公分，已知紙的面積為 493 平方公分，則竹筷長度為______公分。

解　設竹筷長度為 x 公分，由題意知紙的長度為（$2x-1$）公分，寬度為（$x+2$）公分

∴面積為（$2x-1)(x+2)=493$

⇨ $2x^2+3x-495=0$

⇨ $(x-15)(2x+33)=0$

$$\begin{array}{ccc} 1 & \times & -15 \\ 2 & & 33 \\ \hline \multicolumn{3}{c}{33-30=3} \end{array}$$

⇨ $x=15$ 或 $-\dfrac{33}{2}$（不合）

故竹筷長度為 15 公分

試題10

某旅行社舉行三天兩夜的旅遊，預定人數為 30 人，每人收費 5000 元，但人數若超過 30 人，每增加 1 人，則每人可減收 100 元，已知旅行社共收到 160000 元，則共有______人參加。

解　設增加 x 人，由題意知

$(30+x)(5000-100x)=160000$

⇨ $150000+5000x-3000x-100x^2=160000$

⇨ $100x^2-2000x+10000=0$

⇨ $x^2-20x+100=0$

⇨ $(x-10)^2=0$

⇨ $x=10$

∴參加人數為 40 人

第 6 回 不等式

重點

一、一元一次不等式（配合第一冊 1-2 研習）

僅含一個未知數且次方為一次的不等式，稱為一元一次不等式。

設 $ax\geq b$ 為一元一次不等式，其中 $a\neq 0$，則：

1. 若 $a>0$，則 $x\geq\dfrac{b}{a}$。
2. 若 $a<0$，則 $x\leq\dfrac{b}{a}$。

＊**二、絕對值不等式**（配合第一冊 1-2 研習）

設 $a\geq 0$，$b\geq 0$，且 x 為實數，

1. 若 $|x|\leq a$，則 $-a\leq x\leq a$。
2. 若 $|x|\geq a$，則 $x\geq a$ 或 $x\leq -a$。
3. 若 $a<|x|\leq b$，則 $a<x\leq b$ 或 $-b\leq x<-a$。

試題 1

試解下列各不等式，並在數線上圖示其解。

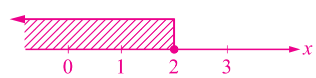
(1) $3x+6\leq 12$。　　(2) $-4x+3<-8$。

解 (1) $3x+6\leq 12$

⇨ $3x\leq 6$

⇨ $x\leq 2$

其圖示如右

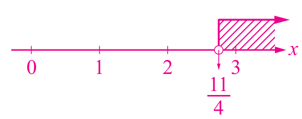


(2) $-4x+3<-8$

⇨ $-4x<-11$

⇨ $x>\dfrac{11}{4}$

其圖示如右



試題 2

試解不等式 $3(x-2)-(x-5)\leq x-3$，並在數線上圖示其解。

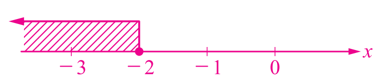
解 $3(x-2)-(x-5)\leq x-3$

⇨ $3x-6-x+5\leq x-3$

⇨ $3x-x-x\leq -3+6-5$

⇨ $x\leq -2$

其圖示如右



試題 3

試解不等式 $\dfrac{2x+1}{3}-\dfrac{3x-2}{4}<\dfrac{x-1}{6}$，並在數線上圖示其解。

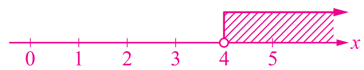
解 $\dfrac{2x+1}{3}-\dfrac{3x-2}{4}<\dfrac{x-1}{6}$

⇨ $4(2x+1)-3(3x-2)<2(x-1)$

⇨ $8x+4-9x+6<2x-2$ ⇨ $8x-9x-2x<-2-4-6$

⇨ $-3x<-12$ ⇨ $x>\dfrac{-12}{-3}$ ⇨ $x>4$

其圖示如右



試題 4

試解一元一次不等式 $-5<2x+1\leq 11$，並在數線上圖示其解。

解 $-5<2x+1\leq 11$

⇨ $-6<2x\leq 10$

⇨ $-3<x\leq 5$

其圖示如右

試題 5

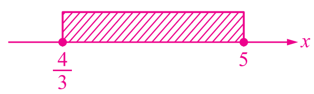
不等式 $x+3\leq 8\leq 3x+4$ 的解在數線上表示一線段，試求此線段的長度。

解 $\because x+3\leq 8$　$\therefore x\leq 5$ ……………………①

又 $8\leq 3x+4$ ⇨ $3x\geq 4$ ⇨ $x\geq\dfrac{4}{3}$ …………②

由①、②得 $\dfrac{4}{3}\leq x\leq 5$

圖示如右，故長度為 $5-\dfrac{4}{3}=\dfrac{11}{3}$



試題 6

試解一元一次聯立不等式 $\begin{cases}2x-3\geq 4x+5\\ \dfrac{x-1}{3}+2x+15>-x+\dfrac{1}{2}\end{cases}$，並在數線上圖示其解。

解 $\begin{cases}2x-3\geq 4x+5 \cdots\cdots\cdots ①\\ \dfrac{x-1}{3}+2x+15>-x+\dfrac{1}{2} \cdots\cdots ②\end{cases}$

由①得 $2x-3\geq 4x+5$ ⇨ $2x-4x\geq 5+3$

⇨ $-2x\geq 8$ ⇨ $x\leq -4$ ……………………③

由②×6 得 $2(x-1)+6(2x+15)>6\left(-x+\dfrac{1}{2}\right)$

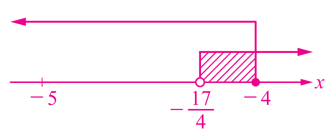
⇨ $2x-2+12x+90>-6x+3$

⇨ $2x+12x+6x>3+2-90$ ⇨ $20x>-85$

⇨ $x>\dfrac{-85}{20}$ ⇨ $x>-\dfrac{17}{4}$ …………④

由③、④得 $-\dfrac{17}{4}<x\leq -4$

其圖示如右



試題 7

輕翔買了每個 15 元的麵包 4 個，每個 35 元的蛋糕若干個（至少買 3 個），總共花費不超過 250 元，則輕翔可能買了______個蛋糕。

解 設輕翔買了 35 元蛋糕 x 個，其中 $x\geq 3$ ……………①

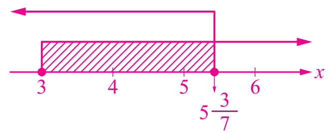
由題意知

$15\times 4+35x\leq 250$

$\Rightarrow 35x\leq 190 \Rightarrow x\leq\dfrac{190}{35}\Rightarrow x\leq 5\dfrac{3}{7}$ ……………………②

由①、②得 $3\leq x\leq 5\dfrac{3}{7}$

圖示如右



又 x 為整數

故輕翔可能買了 3 個、4 個或 5 個蛋糕

試題 8

＊試解下列各不等式，並在數線上圖示其解。

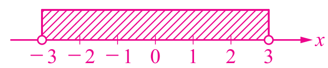
(1) $|x|<3$。　　(2) $|x|\geq 3$。

解 (1) 若 $x\geq 0$，則 $|x|=x<3$

若 $x<0$，則 $|x|=-x<3 \Rightarrow x>-3$

由上述知 $-3<x<3$

圖示如右

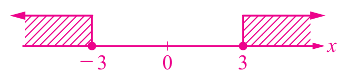


(2) 若 $x\geq 0$，則 $|x|=x\geq 3$

若 $x<0$，則 $|x|=-x\geq 3 \Rightarrow x\leq -3$

由上述知 $x\geq 3$ 或 $x\leq -3$

圖示如右



試題 9

＊試解下列各不等式，並在數線上圖示其解。

(1) $|2x-1|\leq 7$。　　(2) $|3x-1|>5$。

解 (1) $|2x-1|\leq 7$

$\Rightarrow -7\leq 2x-1\leq 7$

$\Rightarrow -6\leq 2x\leq 8$　$\therefore -3\leq x\leq 4$

(2) $|3x-1|>5$

$\Rightarrow 3x-1>5$ 或 $3x-1<-5$

$\Rightarrow 3x>6$ 或 $3x<-4$

$\Rightarrow x>2$ 或 $x<-\dfrac{4}{3}$

試題 10

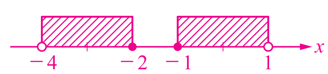
＊試求不等式 $1\leq|2x+3|<5$ 之解，並在數線上圖示其解。

解 $1\leq|2x+3|<5$

$\Rightarrow 1\leq 2x+3<5$ 或 $-5<2x+3\leq -1$

$\Rightarrow -2\leq 2x<2$ 或 $-8<2x\leq -4$

$\therefore -1\leq x<1$ 或 $-4<x\leq -2$



實力檢測 2

年　月　日　分

範圍：4～6 回複習

計算題（每題 10 分，若有 2 小題，每小題 5 分，共 100 分）

1. 試解方程式 $(3x+2)+2[(x-1)-(2x+1)]=6$。

解 $(3x+2)+2[(x-1)-(2x+1)]=6$
⇨ $(3x+2)+2(x-1-2x-1)=6$
⇨ $(3x+2)+2(-x-2)=6$
⇨ $3x+2-2x-4=6$
⇨ $x=6+4-2$
⇨ $x=8$

2. 試解方程式 $\dfrac{x+8}{3}-\dfrac{6x-4}{7}=\dfrac{-4x+1}{21}$。

解 $\dfrac{x+8}{3}-\dfrac{6x-4}{7}=\dfrac{-4x+1}{21}$
⇨ $7(x+8)-3(6x-4)=-4x+1$
⇨ $7x+56-18x+12=-4x+1$
⇨ $7x-18x+4x=-56-12+1$
⇨ $-7x=-67$ ⇨ $x=\dfrac{67}{7}$

3. 試解下列各一元二次方程式：

(1) $6x^2+7x-20=0$。

(2) $3x^2+5x-9=0$。

解 (1) $6x^2+7x-20=0$
⇨ $(3x-4)(2x+5)=0$
⇨ $3x-4=0$ 或 $2x+5=0$
⇨ $x=\dfrac{4}{3}$ 或 $x=-\dfrac{5}{2}$

(2) $3x^2+5x-9=0$
⇨ $x=\dfrac{-5\pm\sqrt{25-4\times3\times(-9)}}{6}$
$=\dfrac{-5\pm\sqrt{133}}{6}$

4. 試解方程式 $\dfrac{x(3x+2)}{6}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{3x-2}{3}$。

解 $\dfrac{x(3x+2)}{6}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{3x-2}{3}$
⇨ $x(3x+2)-3=2(3x-2)$
⇨ $3x^2+2x-3-6x+4=0$
⇨ $3x^2-4x+1=0$
⇨ $(x-1)(3x-1)=0$
⇨ $x=1$ 或 $x=\dfrac{1}{3}$

$$\begin{array}{ccc} 1 & \times & -1 \\ 3 & & -1 \\ \hline \multicolumn{3}{c}{-1-3=-4} \end{array}$$

5. 試解不等式 $\dfrac{x-2}{4}-\dfrac{2x+5}{3}>\dfrac{x+1}{2}$。

解 $\dfrac{x-2}{4}-\dfrac{2x+5}{3}>\dfrac{x+1}{2}$

⇨ $3(x-2)-4(2x+5)>6(x+1)$

⇨ $3x-6-8x-20>6x+6$

⇨ $3x-8x-6x>6+6+20$

⇨ $-11x>32$

⇨ $x<-\dfrac{32}{11}$

＊6. 試解不等式 $|1-2x|\geq 5$。

解 $|1-2x|\geq 5$

⇨ $1-2x\geq 5$ 或 $1-2x\leq -5$

⇨ $-2x\geq 4$ 或 $-2x\leq -6$

⇨ $x\leq -2$ 或 $x\geq 3$

7. 若 x 的一元二次方程式 $2x^2+ax+3a+3=0$ 有一個解為 $x=4$，則：

(1) $a=$______。　　(2) 另一個解為______。

解 (1) ∵$x=4$ 為 $2x^2+ax+3a+3=0$ 之一個解

∴$2\times 4^2+4a+3a+3=0$

⇨ $7a+35=0$ ⇨ $a=-5$

(2) 原方程式為 $2x^2-5x-12=0$

⇨$(x-4)(2x+3)=0$

⇨ $x=4$ 或 $x=-\dfrac{3}{2}$

∴另一個解為 $-\dfrac{3}{2}$

$\begin{array}{ccc} 1 & \times & -4 \\ 2 & & 3 \\ \hline \multicolumn{3}{c}{3-8=-5} \end{array}$

8. 同時滿足不等式 $5x-1>3x+4$ 與 $-\dfrac{1}{3}x\leq\dfrac{5}{2}-x$ 的整數值 x 為______。

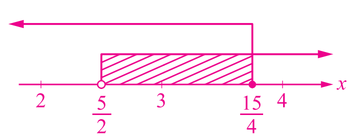
解 $5x-1>3x+4$ ⇨ $5x-3x>4+1$

⇨ $2x>5$ ⇨ $x>\dfrac{5}{2}$ ……………①

$-\dfrac{1}{3}x\leq\dfrac{5}{2}-x$ ⇨ $x-\dfrac{1}{3}x\leq\dfrac{5}{2}$

⇨ $\dfrac{2}{3}x\leq\dfrac{5}{2}$ ⇨ $x\leq\dfrac{5}{2}\times\dfrac{3}{2}$

⇨ $x\leq\dfrac{15}{4}$ ……………………………②



由①、②得 $\dfrac{5}{2}<x\leq\dfrac{15}{4}$

故 x 的整數值為 3

9. 某男女合班，若男生占全班人數的 $\frac{4}{7}$ 少 3 人，女生占全班人數的 $\frac{1}{6}$ 多 14 人，試問男生有______人，女生有______人。

解 設全班有 x 人

則男生有 $\left(\frac{4}{7}x-3\right)$ 人，女生有 $\left(\frac{1}{6}x+14\right)$ 人

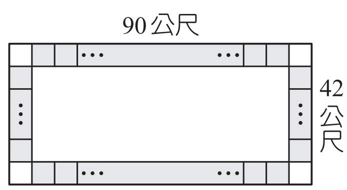
$\therefore \left(\frac{4}{7}x-3\right)+\left(\frac{1}{6}x+14\right)=x$

$\Rightarrow \frac{24}{42}x+\frac{7}{42}x-x=-14+3$

$\Rightarrow \frac{-11}{42}x=-11 \Rightarrow x=42$

$\therefore$男生有 $42\times\frac{4}{7}-3=21$（人），女生有 $42\times\frac{1}{6}+14=21$（人）

10. 右圖的長方形為某園遊會場地，長 90 公尺，寬 42 公尺，其中每 1 個灰色小格為面積相等的正方形，且各代表一個攤位，若圖中灰色區域（即攤位）的總面積為 720 平方公尺，則此園遊會場地共有______個攤位。



解 設每個攤位邊長為 x 公尺，由題意知

$2(90-2x)x+2(42-2x)x=720$

$\Rightarrow 180x-4x^2+84x-4x^2=720$

$\Rightarrow 8x^2-264x+720=0$

$\Rightarrow x^2-33x+90=0$

$\Rightarrow (x-3)(x-30)=0$

$\Rightarrow x=3$ 或 30（不合）

$\because$每個攤位面積為 9 平方公尺

又 $720\div9=80$

故共有 80 個攤位

第 7 回

函數與線性函數

重點

一、函數

1. 函數：

若 x，y 表示兩種變數，而且對於任意一個 x 的值，恰有一個 y 值與它對應，則這種對應關係，我們稱為 y 是 x 的函數。

2. 函數的判別法則：

在 $y=f(x)$ 中，

(1) 若 x 的每一值，y 恰有一對應值，則 y 是 x 的函數。(一對一函數)

(2) 兩個或兩個以上的 x 可有相同的 y 值，則 y 亦是 x 的函數。(多對一函數)

(3) 若 x 的每一值，y 非恰有一對應值與 y 沒有對應值，則 y 不是 x 的函數。(一對多或一對無不是函數)

二、線性函數

1. 設 a，b 是常數，則 $f(x)=ax+b$ 所表示的函數叫做線性函數，它的圖形為一直線。

(1) 一次函數：$y=f(x)=ax+b$ 中，若 $a\neq 0$，這種函數叫做一次函數，亦可以看成是一個二元一次方程式，其圖形為一條斜直線。

例：$f(x)=3x$，$g(x)=5x-7$ 都是一次函數。

但 $f(x)=\dfrac{8}{x}$，$g(x)=3x^2$，$h(x)=4x^2+2$ 都不是 x 的一次函數。

(2) 常數函數：$y=f(x)=ax+b$ 中，若 $a=0$，亦即 $y=f(x)=b$ 這種函數叫做常數函數，它的圖形是 x 軸（當 $b=0$ 時），或與 x 軸平行的直線（當 $b\neq 0$ 時）。

例：$f(x)=4$，$g(x)=-5$，$h(x)=0$ 都是常數函數。

2. 函數圖形：

在坐標平面上，將合於 $y=f(x)$ 關係的所有點 (x, y)，描繪出來所得到的圖形，就是函數 f 的圖形。在描繪線性函數的圖形時，只要求出兩組對應值，並在圖上描出這兩點，再用直尺畫出經過這兩點的直線即可。

試題 1

＊設函數 $y=f(x)$，其定義如下：

$$y=f(x)=\begin{cases} 3x-1，若\ x>3 \\ x^2-2，若\ -2\leq x\leq 3 \\ 2x+3，若\ x<-2 \end{cases}$$

，試求：

(1) $f(3)=$______。 (2) $f(4)=$______。 (3) $f(-3)=$______。

解 (1) $f(3)=3^2-2=7$

(2) $f(4)=3\times 4-1=11$

(3) $f(-3)=2\times(-3)+3=-3$

試題 2

設 $f(x)=3x^2+ax+b$，又 $f(2)=8$，$f(-3)=48$，則數對 $(a,b)=$ ______，又 $f(x)=$ ______。

解 $\because f(2)=8$

$\Rightarrow 12+2a+b=8$

$\Rightarrow 2a+b=-4$ ……①

$\because f(-3)=48$

$\Rightarrow 27-3a+b=48$

$\Rightarrow -3a+b=21$ ……②

解①、②得 $a=-5$，$b=6$

$\Rightarrow$ 數對 $(a,b)=(-5,6)$，代入 $f(x)$

得 $f(x)=3x^2-5x+6$

試題 3

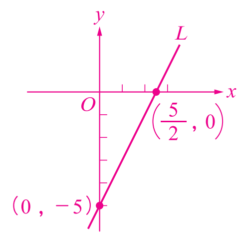
畫出下列各函數的圖形：

(1) $f(x)=2x-5$。　(2) $f(x)=-3x+6$。　(3) $f(x)=5$。

解 (1) 令 $y=2x-5$

x	0	$\frac{5}{2}$
y	-5	0

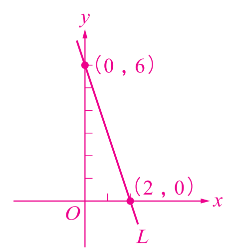
其圖形是過 $(0,-5)$ 及 $\left(\frac{5}{2},0\right)$ 兩點的直線 L



(2) 令 $y=-3x+6$

x	0	2
y	6	0

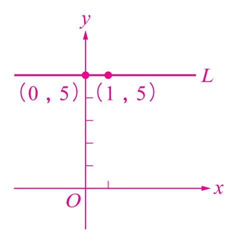
其圖形是過 $(0,6)$ 及 $(2,0)$ 兩點的直線 L



(3) 令 $y=5$

x	0	1
y	5	5

其圖形是過 $(0,5)$ 及 $(1,5)$ 兩點的直線 L



試題 4

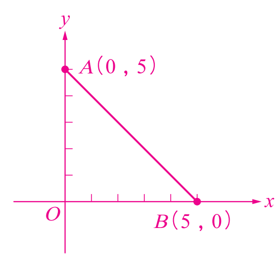
畫出下列各函數的圖形：

(1) $f(x)=-x+5$，其中 $x\geq 0$，$y\geq 0$。　(2) $f(x)=x+1$，其中 $x<5$ 且 x 為正整數。

解 (1) 令 $y=-x+5$，其中 $x\geq 0$，$y\geq 0$

x	0	5
y	5	0

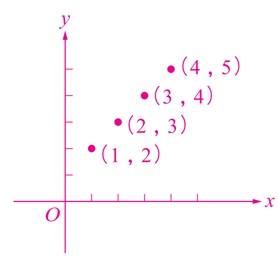
其圖形是 $A(0,5)$，$B(5,0)$ 為端點的 $\overline{AB}$



(2) 令 $y=x+1$，其中 $x<5$ 且 x 為正整數

x	1	2	3	4
y	2	3	4	5

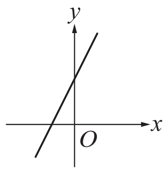
$\therefore$ 其圖形是右圖中 $(1,2)$，$(2,3)$，$(3,4)$，$(4,5)$ 四個點



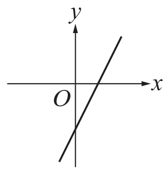
試題 5

下列哪一個圖形可為函數 $f(x)=2x-3$ 的圖形？

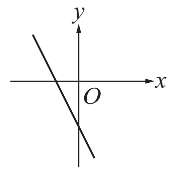
(A)



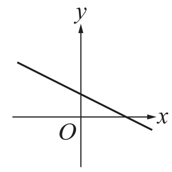
(B)



(C)



(D)



解

令 $y=2x-3$，由

x	0	$\frac{3}{2}$
y	-3	0

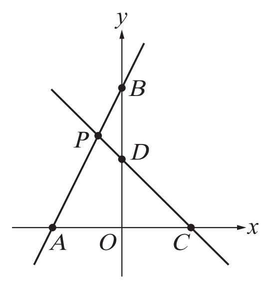
知可能圖形為(B)

試題 6

如右圖，為一次函數 $f(x)=2x+6$ 與 $g(x)=-x+3$ 的圖形，試求：

(1) A 點坐標為______。 (2) D 點坐標為______。

(3) P 點坐標為______。 (4) $\triangle AOB$ 的面積：$\triangle PAC$ 的面積為______。



解

(1) $\because y=2x+6$ $\therefore$

x	-3	0
y	0	6

故 $A(-3，0)$，$B(0，6)$

(2) $\because y=-x+3$ $\therefore$

x	3	0
y	0	3

故 $C(3，0)$，$D(0，3)$

(3) $\begin{cases} y=2x+6 \\ y=-x+3 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=4 \end{cases}$ $\therefore P(-1，4)$

(4) $\triangle AOB$ 的面積：$\triangle PAC$ 的面積$=\left(\frac{1}{2}\times 3\times 6\right):\left(\frac{1}{2}\times 6\times 4\right)=3:4$

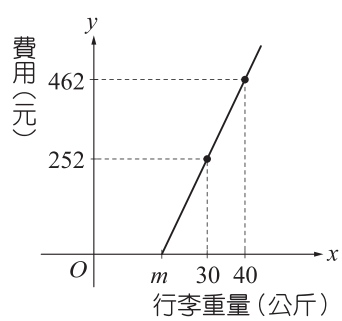
試題 7

某航空公司規定：旅客搭乘飛機時，行李重量為 x 公斤，則託運費為 y 元。若重量不超過 m 公斤時，完全免費，其 x 與 y 的線性函數關係如右圖，則：

(1) x 與 y 的關係式為______。

(2) $m=$______。

(3) 若搭機時所託運的行李重 65 公斤，需付託運費______元。



解

(1) $\because y$ 與 x 成線性函數的關係 $\therefore$設 $y=f(x)=ax+b$

以 $(30，252)$，$(40，462)$ 代入

得 $\begin{cases} 30a+b=252 \\ 40a+b=462 \end{cases}$，解得 $a=21$，$b=-378$

故 x 與 y 的關係式為 $y=f(x)=21x-378$

(2) 令 $y=0$，得 $x=18$，即 $m=18$

(3) 令 $x=65$，得 $y=21\times 65-378=987$，故需付 987 元

第 8 回 二次函數

重點

一、二次函數的意義

設 a，b，c 為常數，且 $a\neq 0$，其中形如 $y=ax^2+bx+c$ 的函數，由於其自變數 x 的最高次數為二次，故稱為二次函數，其圖形為一拋物線。

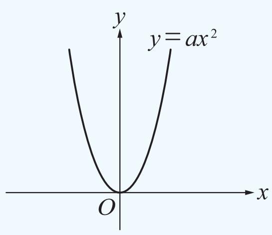
二、二次函數的圖形與極值

二次函數 $f(x)=ax^2+bx+c$，$a\neq 0$，因

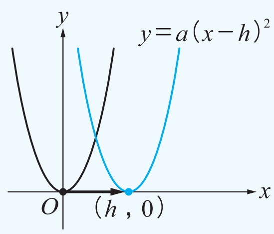
$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)+c-\frac{b^2}{4a}=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$$

而可改寫為 $f(x)=a(x-h)^2+k$，其中 $h=-\dfrac{b}{2a}$，$k=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$，且直線 $x=h$ 為對稱軸。

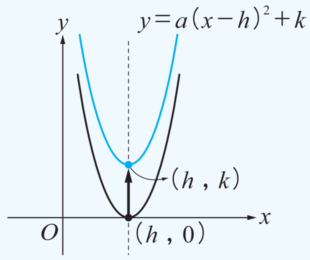
函數圖形是拋物線 $y=ax^2$ 經水平移動為 $y=a(x-h)^2$，再上下移動為 $y=a(x-h)^2+k$。



$a>0$



$a>0$，$h>0$



$a>0$，$h>0$，$k>0$

1. 當 $a>0$ 時，拋物線開口向上，頂點 $(h，k)$ 為最低點，亦即當 $x=h$ 時，$f(x)$ 有最小值為 k。
2. 當 $a<0$ 時，拋物線開口向下，頂點 $(h，k)$ 為最高點，亦即當 $x=h$ 時，$f(x)$ 有最大值為 k。

試題 1

試描繪 $y=x^2-4x+1$ 的圖形，並標出頂點坐標及對稱軸方程式。

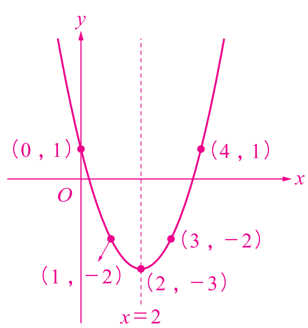
解 $y=x^2-4x+1$

$=x^2-4x+4-3$

$=(x-2)^2-3$

x	0	1	2	3	4
y	1	-2	-3	-2	1

頂點坐標為 $(2，-3)$，對稱軸方程式為 $x=2$



試題 2

試描繪 $y=-3x^2+6x+2$ 的圖形，並標出頂點坐標及對稱軸方程式。

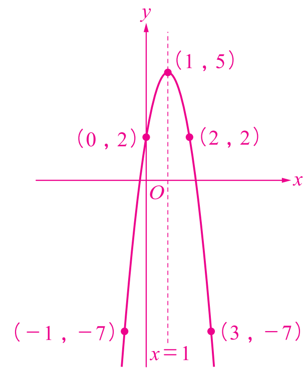
解 $y=-3x^2+6x+2$

$=-3(x^2-2x)+2$

$=-3(x-1)^2+5$

x	-1	0	1	2	3
y	-7	2	5	2	-7

頂點坐標為 $(1，5)$，對稱軸方程式為 $x=1$



試題 3

試求下列各二次函數的最大值或最小值：

(1) $y=3x^2+8x+2$。 (2) $y=-2x^2+6x-7$。

解 (1) $y=3x^2+8x+2$

$=3\left(x^2+\frac{8}{3}x\right)+2=3\left(x+\frac{4}{3}\right)^2-\frac{10}{3}$

故當 $x=-\frac{4}{3}$ 時，y 有最小值 $-\frac{10}{3}$

(2) $y=-2x^2+6x-7$

$=-2(x^2-3x)-7$

$=-2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{2}$

故當 $x=\frac{3}{2}$ 時，y 有最大值 $-\frac{5}{2}$

試題 4

＊試求下列各二次函數的最大值與最小值：

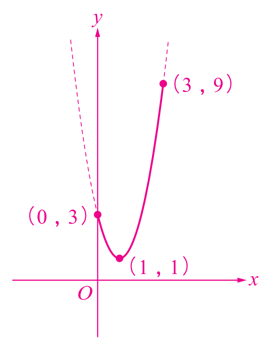
(1) $y=2x^2-4x+3$，其中 $0\leq x\leq 3$。 (2) $y=-x^2-4x+5$，其中 $-1\leq x\leq 1$。

解 (1) $y=2x^2-4x+3$

$=2(x-1)^2+1$，其中 $0\leq x\leq 3$

故當 $x=1$ 時，y 有最小值為 1

當 $x=3$ 時，y 有最大值為 9

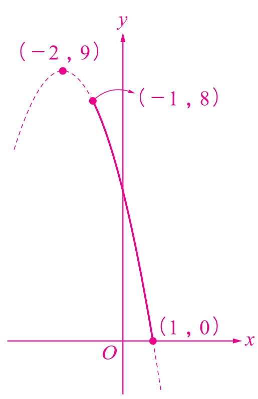


(2) $y=-x^2-4x+5$

$=-(x+2)^2+9$，其中 $-1\leq x\leq 1$

故當 $x=-1$ 時，y 有最大值為 8

當 $x=1$ 時，y 有最小值為 0



試題 5

若二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 通過（0，4），（1，3），（2，6），則序組（a，b，c）＝______。

解　將（0，4），（1，3），（2，6）代入 $y=ax^2+bx+c$ 中得

$\begin{cases} c=4 \\ a+b+c=3 \\ 4a+2b+c=6 \end{cases}$　解之得 $a=2$，$b=-3$，$c=4$

故序組（a，b，c）＝（2，-3，4）

試題 6

若 $f(x)=-3x^2+ax+b$，在 $x=5$ 時，$f(x)$ 有最大值 -2，則數對（a，b）＝______。

解　$f(x)=-3x^2+ax+b$

$=-3(x-5)^2-2$

$=-3x^2+30x-77$

$\therefore a=30$，$b=-77$

故數對（a，b）＝（30，-77）

試題 7

若二次函數 $y=(k^2-5)x^2+k$ 的圖形是一開口向下之拋物線，且（1，1）為此圖形上一點，則 $k=$______。

解　$\because$（1，1）在 $y=(k^2-5)x^2+k$ 的圖形上

$\therefore 1=(k^2-5)+k$ ⇨ $k^2+k-6=0$

⇨ $(k+3)(k-2)=0$ ⇨ $k=-3$ 或 $k=2$

但當 $k=-3$ 時，$k^2-5=(-3)^2-5=4>0$ 為開口向上與題意開口向下不合

$\therefore k=2$

試題 8

將二次函數 $y=2x^2-12x+22$ 的圖形向右平移 2 個單位，再向下平移 5 個單位，則所得新圖形的二次函數為＿＿＿＿。

解 $y=2x^2-12x+22$

$=2(x^2-6x+3^2)-18+22$

$=2(x-3)^2+4$

⇨ 頂點坐標為（3，4）

∴ 新頂點坐標為（3＋2，4－5）＝（5，－1）

⇨ 新的二次函數為 $y=2(x-5)^2-1$

$=2(x^2-10x+25)-1$

$=2x^2-20x+49$

試題 9

若有一個三角形的高與底邊的和為 6 公分，則此三角形的面積最大是＿＿＿＿平方公分。

解 設此三角形的底為 x 公分，高為（$6-x$）公分，面積為 y 平方公分

則 $y=\dfrac{1}{2}x(6-x)$

$=-\dfrac{1}{2}x^2+3x$

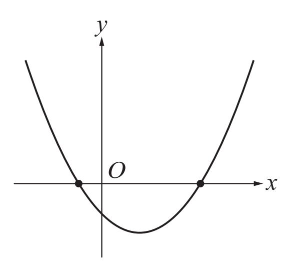
$=-\dfrac{1}{2}(x-3)^2+\dfrac{9}{2}$

當 $x=3$ 時，y 有最大值為 $\dfrac{9}{2}$

故當此三角形的底與高均為 3 公分時，面積最大為 $\dfrac{9}{2}$ 平方公分

試題10

＊二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 的圖形如右，試判斷 a，b，c 及 b^2-4ac 的正負關係。



解 ⑴ 開口朝上　∴$a>0$

⑵ ∵對稱軸 $x=-\dfrac{b}{2a}>0$ 且 $a>0$　∴$b<0$

⑶ ∵圖形與 y 軸的交點（0，c）在 y 軸的負向

∴$c<0$

⑷ ∵圖形與 x 軸交於兩點　∴$b^2-4ac>0$

第 9 回 多項式

重點

一、多項式的排列

1. 升冪排列：按照各項次數大小排列，由次方小排至次方大。
2. 降冪排列：按照各項次數大小排列，由次方大排至次方小。

二、多項式的相等

若兩多項式的次數相同，且所有的同次數項的係數也相等，則稱這兩多項式相等。

三、多項式的加、減、乘、除

1. 兩多項式相加、相減，就是要同次數的項的係數相加、相減。
2. 兩多項式相乘，可利用分配律展開。
3. 兩多項式相除，可利用長除法解題。
4. 利用“分離係數法”時，如遇缺項需補 0。

四、多項式的除法原理

被除式＝除式×商式＋餘式。

五、因式與倍式

設 A、B、C 為多項式，且 $A=B\times C$，其中 B、C 都能整除多項式 A，則 B、C 稱為 A 的因式，而 A 稱為 B 或 C 的倍式。

試題 1

(1) 利用直式計算 $(-5x^2-3x+5)+(4x^2-2x+3)$。

(2) 利用分離係數法計算 $(3x^2-6)-(-2x^2+4x-3)$。

解 (1)
$$\begin{array}{rr} & -5x^2-3x+5 \\ +) & 4x^2-2x+3 \\ \hline & -\ x^2-5x+8 \end{array}$$

(2)
$$\begin{array}{rr} & 3+0-6 \\ -) & -2+4-3 \\ \hline & 5-4-3 \end{array}$$

$\therefore$ 得到 $5x^2-4x-3$

試題 2

計算下列各式：

(1) $(2x^2-3x+1)+(-3x^2+4x)-(x^2-5x+6)$。 (2) $(x^2-2x+6)-[(4x^2-2x+3)+(5x^2-7)]$。

解 (1) $(2x^2-3x+1)+(-3x^2+4x)-(x^2-5x+6)$

$=2x^2-3x+1-3x^2+4x-x^2+5x-6$

$=(2x^2-3x^2-x^2)+(-3x+4x+5x)+(1-6)$

$=-2x^2+6x-5$

(2) $(x^2-2x+6)-[(4x^2-2x+3)+(5x^2-7)]$

$=(x^2-2x+6)-(4x^2-2x+3+5x^2-7)$

$=(x^2-2x+6)-(9x^2-2x-4)$

$=x^2-2x+6-9x^2+2x+4$

$=-8x^2+10$

翰林用心 教師用 精益求精

試題 3

已知 A 為一多項式，且 $A-(-5x^3+7x^2-9x+5)=8x^3-6x+1$，則多項式 $A=$______。

解 $A-(-5x^3+7x^2-9x+5)=8x^3-6x+1$

$A=(8x^3-6x+1)+(-5x^3+7x^2-9x+5)$

$=8x^3-6x+1-5x^3+7x^2-9x+5$

$=(8x^3-5x^3)+7x^2+(-6x-9x)+(1+5)$

$=3x^3+7x^2-15x+6$

試題 4

將 $(5x^2+3x-2)(3x^2-1)$ 乘開後，表成 x 的降冪排列為______。

解 $(5x^2+3x-2)(3x^2-1)$

$=15x^4-5x^2+9x^3-3x-6x^2+2$

$=15x^4+9x^3-11x^2-3x+2$

試題 5

(1) 試展開 $(x-1)(x-3)(x+4)(x+6)=$______。

(2) 承(1)，試求展開式中 x^2 項係數為______。

解 (1) $(x-1)(x-3)(x+4)(x+6)$

$=(x^2-4x+3)(x^2+10x+24)$

$=x^4+10x^3+24x^2-4x^3-40x^2-96x+3x^2+30x+72$

$=x^4+6x^3-13x^2-66x+72$

(2) 展開式中 x^2 項係數為 -13

試題 6

* 已知 $(3x^3+2x-6)(2x^3+ax^2-7)$ 展開後 x^3 項的係數為 -27，則 $a=$______。

解 利用分配律之概念得

x^3 項之係數為 $3\times(-7)+2a+(-6)\times2=-27$

⇨ $-21+2a-12=-27$

⇨ $2a=6$

⇨ $a=3$

試題 7

試求 $2x^3-3x^2+46$ 除以 $x+3$ 之商式為______，餘式為______。

解 直式

$$\begin{array}{r|l}
 & 2x^2-9x+27 \\ \hline
x+3 & 2x^3-3x^2+0x+46 \\
 & \underline{2x^3+6x^2} \\
 & -9x^2+0x \\
 & \underline{-9x^2-27x} \\
 & 27x+46 \\
 & \underline{27x+81} \\
 & -35
\end{array}$$

分離係數法

$$\begin{array}{r|l}
 & 2-9+27 \\ \hline
1+3 & 2-3+0+46 \\
 & \underline{2+6} \\
 & -9+0 \\
 & \underline{-9-27} \\
 & 27+46 \\
 & \underline{27+81} \\
 & -35
\end{array}$$

故商式為 $2x^2-9x+27$，餘式為 -35

試題 8

試求 $2x^3-9x^2+7x+8$ 除以 x^2-3x+1 的商式為______，餘式為______。

解 直式

$$\begin{array}{r|l}
 & 2x-3 \\ \hline
x^2-3x+1 & 2x^3-9x^2+7x+8 \\
 & \underline{2x^3-6x^2+2x} \\
 & -3x^2+5x+8 \\
 & \underline{-3x^2+9x-3} \\
 & -4x+11
\end{array}$$

分離係數法

$$\begin{array}{r|l}
 & 2-3 \\ \hline
1-3+1 & 2-9+7+8 \\
 & \underline{2-6+2} \\
 & -3+5+8 \\
 & \underline{-3+9-3} \\
 & -4+11
\end{array}$$

故商式為 $2x-3$，餘式為 $-4x+11$

試題 9

＊若多項式 $-4x^2+3x+a$ 除以 $bx+3$ 得商式 $4x+9$，餘式為 -10，則數對 $(a,b)=$______。

解 由被除式＝除式×商式＋餘式，知

$-4x^2+3x+a=(bx+3)(4x+9)-10=4bx^2+(9b+12)x+17$

比較係數得 $\begin{cases} 4b=-4 \\ 9b+12=3 \\ a=17 \end{cases}$ ⇨ $a=17$，$b=-1$

故數對 $(a,b)=(17,-1)$

試題10

若多項式 $4x^3-3x^2+5x+k$ 能被 $x-2$ 整除，則 $k=$______。

解 $\because 4x^3-3x^2+5x+k$ 能被 $x-2$ 整除

$\therefore (4x^3-3x^2+5x+k)\div(x-2)$ 的餘式為 0

$$\begin{array}{r|l}
 & 4x^2+5x+15 \\ \hline
x-2 & 4x^3-3x^2+5x+k \\
 & \underline{4x^3-8x^2} \\
 & 5x^2+5x \\
 & \underline{5x^2-10x} \\
 & 15x+k \\
 & \underline{15x-30} \\
 & (k+30)
\end{array}$$

故餘式 $=k+30=0$ ⇨ $k=-30$

實力檢測 3

年　月　日　分

範圍：7～9 回複習

計算題（每題 10 分，共 100 分）

1. 化簡 $(2x^2-3)-[(3x^2-x-4)-5(x^2-4)]=$______。

解 $(2x^2-3)-[(3x^2-x-4)-5(x^2-4)]$
$=(2x^2-3)-(3x^2-x-4-5x^2+20)$
$=(2x^2-3)-(-2x^2-x+16)$
$=2x^2-3+2x^2+x-16$
$=4x^2+x-19$

2. 若多項式 $3x^3-14x^2+11x+3$ 除以一多項式，得商式為 $3x-5$，餘式為 $2x-7$，則此多項式為______。

解 設除式為 $f(x)$，由題意知
$3x^3-14x^2+11x+3=f(x)\times(3x-5)+(2x-7)$
$\Rightarrow f(x)=\dfrac{(3x^3-14x^2+11x+3)-(2x-7)}{3x-5}$
$=\dfrac{3x^3-14x^2+9x+10}{3x-5}$
$=x^2-3x-2$

3. 設函數 $f(x)=ax+b$ 之圖形通過 $(-5,-23)$ 與 $(4,4)$ 兩點，則數對 $(a,b)=$______。

解 $y=f(x)=ax+b$
通過 $(-5,-23)$，$(4,4)$
$\Rightarrow \begin{cases}-23=-5a+b \cdots\cdots ①\\ 4=4a+b \cdots\cdots ②\end{cases}$
②－①得 $9a=27 \Rightarrow a=3$
代入②得 $4=4\times3+b \Rightarrow b=-8$
故數對 $(a,b)=(3,-8)$

4. 設函數 $f(x)=ax+b$ 的圖形平行 x 軸且通過點 $(4,7)$，則數對 $(a,b)=$______。

解 $\because f(x)$ 的圖形平行 x 軸
$\therefore f(x)$ 為常數函數
$\Rightarrow a=0$，得 $f(x)=b$
又 $f(x)$ 過點 $(4,7)$
$\therefore b=7$
故數對 $(a,b)=(0,7)$

5. 設函數 $f(x)=6x^2-7x-8$ 與 $g(x)=-18x+2$ 在 $x=a$ 時有相同的函數值，則 $a=$______。

解 $f(a)=6a^2-7a-8$，$g(a)=-18a+2$

$\because f(a)=g(a)$

⇨ $6a^2-7a-8=-18a+2$

⇨ $6a^2+11a-10=0$

⇨ $(3a-2)(2a+5)=0$

⇨ $a=\dfrac{2}{3}$ 或 $a=-\dfrac{5}{2}$

6. 試求二次函數 $y=-2x^2-6x+\dfrac{3}{2}$ 的頂點坐標為______。

解

$$\begin{aligned} y&=-2x^2-6x+\frac{3}{2}\\ &=-2(x^2+3x)+\frac{3}{2}\\ &=-2\left(x^2+3x+\frac{9}{4}\right)+\frac{3}{2}+\frac{9}{2}\\ &=-2\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+6 \end{aligned}$$

$\therefore$ 頂點坐標為 $\left(-\dfrac{3}{2}，6\right)$

7. 二次函數圖形與 x 軸交於 $(3，0)$，$(-3，0)$ 兩點，且與 y 軸交於 $(0，9)$，則此二次函數為______。

解 設 $y=a(x-3)(x+3)$

將 $(0，9)$ 代入上式得 $a\times(0-3)\times(0+3)=9$

⇨ $-9a=9$ ⇨ $a=-1$

$\therefore y=-(x-3)(x+3)=-x^2+9$

8. 若 $f(x)=-3x^2+ax+b$，在 $x=2$ 時，有最大值 -5，則數對 $(a, b)=$______。

解 $f(x)=-3x^2+ax+b$

$=-3(x-2)^2-5$

$=-3x^2+12x-17$

比較係數得 $a=12$，$b=-17$

故數對 $(a, b)=(12, -17)$

9. 若二次函數 $y=-\frac{2}{3}x^2+b$ 的圖形向上平移 $\frac{5}{3}$ 個單位可得到 $y=ax^2+2$ 的圖形，則數對 $(a, b)=$______。

解 由 $y=-\frac{2}{3}x^2+b$ 向上平移 $\frac{5}{3}$ 個單位

可得 $y=-\frac{2}{3}x^2+\left(b+\frac{5}{3}\right)$ 的函數圖形

比較係數得 $a=-\frac{2}{3}$，$b+\frac{5}{3}=2 \Rightarrow b=\frac{1}{3}$

故數對 $(a, b)=\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$

10. 若二次函數 $y=x^2+4x-12$ 的圖形與 y 軸交於 A 點，與 x 軸分別交於 B、C 兩點，則 $\triangle ABC$ 的面積為______。

解 令 $x=0 \Rightarrow y=-12$

$\therefore$ 與 y 軸的交點為 $A(0, -12)$

令 $y=0 \Rightarrow x^2+4x-12=0$

$\Rightarrow (x-2)(x+6)=0$

$\Rightarrow x=2$ 或 -6

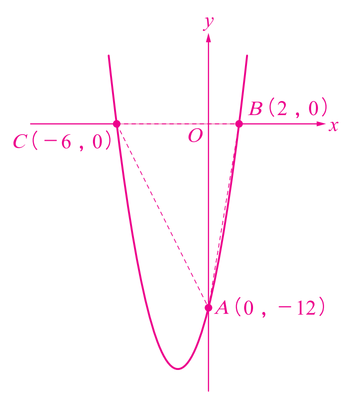
$\therefore$ 與 x 軸的交點為 $B(2, 0)$，$C(-6, 0)$

故 $\triangle ABC$ 的面積

$=\frac{1}{2}\times|2-(-6)|\times 12$

$=\frac{1}{2}\times 8\times 12$

$=48$



第 10 回 指數與比例式

重點

一、指數記法

1. a^m 表示 m 個 a 連乘。
2. 當 $a<0$ 時：
   (1) 若 m 為偶數，則 a^m 為正數。
   (2) 若 m 為奇數，則 a^m 為負數。
3. 當 $a\neq 0$ 時，$0^a=0$，$a^0=1$，但 0^0 無意義。
4. 當 $a\neq 0$ 時，$a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$。

二、指數律

1. $a^m\times a^n=a^{m+n}$。
2. $a^m\div a^n=a^{m-n}$。
3. $a^m\times b^m=(a\times b)^m$。
4. $a^m\div b^m=\left(\dfrac{a}{b}\right)^m$。
5. $(a^m)^n=a^{m\times n}$。

三、比較大小

1. 若 $a>b>0$ 且 $m>0$，則 $a^m>b^m$。
2. 若 $a>1$ 且 $m>n$，則 $a^m>a^n$。
3. 若 $0<a<1$ 且 $m>n$，則 $a^m<a^n$。

四、比例式

1. 比的意義：
   設 a，b 為任意數且 $b\neq 0$，則 a 與 b 的比記作 $a:b$，其中 a 為比的前項，b 為比的後項。
2. 比值的意義：
   一個比 $a:b$，若用前項 a 除以後項 b 所得的商為 $\dfrac{a}{b}$，則 $\dfrac{a}{b}$ 叫做這個比的比值。
3. 比例式：
   將比值相等的比寫成等式，如 $a:b=c:d$ 這樣的等式，稱為比例式，且比例式具有外項乘積等於內項乘積的性質，即 $a:b=c:d$，則 $ad=bc$。
4. 比例式的應用：
   (1) 若 $x:y=a:b$，即 $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}$，則可令 $x=ak$，$y=bk$，其中 $k\neq 0$。
   (2) 若 $x:y:z=a:b:c$，即 $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$，則可令 $x=ak$，$y=bk$，$z=ck$，其中 $k\neq 0$。

試題 1

試求下列各式的值：

(1) $5^3=$______。
(2) $5^0=$______。
(3) $(-2)^3=$______。
(4) $-2^3=$______。
(5) $(-2)^4=$______。
(6) $-2^4=$______。
(7) $3^{-4}=$______。
(8) $2^{-5}=$______。

解 (1) $5^3=5\times5\times5=125$
(2) $5^0=1$
(3) $(-2)^3=(-2)\times(-2)\times(-2)=-8$
(4) $-2^3=-(2\times2\times2)=-8$
(5) $(-2)^4=(-2)\times(-2)\times(-2)\times(-2)=16$
(6) $-2^4=-(2\times2\times2\times2)=-16$
(7) $3^{-4}=\dfrac{1}{3^4}=\dfrac{1}{81}$
(8) $2^{-5}=\dfrac{1}{2^5}=\dfrac{1}{32}$

試題 2

試求下列各式的值：

(1) $32\div(-4)^2-(-125)\div5^2=$______。
(2) $11-3^2\times[2-(-3)^2]+6=$______。
(3) $3^{-2}\times3\div3^2\times(3^2)^3=$______。
(4) $2^7\times5^6\div(10^3)^2+(-2)^0=$______。

解 (1) $32\div(-4)^2-(-125)\div5^2$
$=32\div16-(-125)\div25$
$=2+5$
$=7$

(2) $11-3^2\times[2-(-3)^2]+6$
$=11-9\times(2-9)+6$
$=11-9\times(-7)+6$
$=11+63+6$
$=80$

(3) $3^{-2}\times3\div3^2\times(3^2)^3$
$=3^{-1}\div3^2\times3^6$
$=3^{-3}\times3^6$
$=3^3$
$=27$

(4) $2^7\times5^6\div(10^3)^2+(-2)^0$
$=2\times(2^6\times5^6)\div10^6+1$
$=2\times10^6\div10^6+1$
$=2+1$
$=3$

試題 3

試比較下列各數的大小：

(1) 2^{24}，3^{16}，10^8。
(2) 2^{20}，4^{12}，8^6。
(3) $(-6)^{10}$，$(-6)^9$，$(-6)^8$。

解 (1) $2^{24}=(2^3)^8=8^8$
$3^{16}=(3^2)^8=9^8$
$\because 10^8>9^8>8^8$ $\therefore 10^8>3^{16}>2^{24}$

(2) $4^{12}=(2^2)^{12}=2^{24}$
$8^6=(2^3)^6=2^{18}$
$\because 2^{24}>2^{20}>2^{18}$ $\therefore 4^{12}>2^{20}>8^6$

(3) $(-6)^{10}=6^{10}$
$(-6)^9=-6^9$
$(-6)^8=6^8$
$\because 6^{10}>6^8>-6^9$
$\therefore (-6)^{10}>(-6)^8>(-6)^9$

試題 4

(1) 若 $2^{50}-2^{49}=2^{a}$，則 $a=$______。

(2) 若 $3^{28}+3^{26}=b\times3^{26}$，則 $b=$______。

解 (1) $2^{50}-2^{49}=2\times2^{49}-1\times2^{49}$
$=1\times2^{49}=2^{49}$
$\therefore a=49$

(2) $3^{28}+3^{26}=3^{2}\times3^{26}+1\times3^{26}$
$=9\times3^{26}+1\times3^{26}=10\times3^{26}$
$\therefore b=10$

試題 5

假設於某項實驗中，原有 7 個細菌，每經過 1 分鐘細菌數量會增加為原來的 2 倍。試問：

(1) 3 分鐘後的細菌有______個。

(2) 15 分鐘後的細菌數是 10 分鐘後細菌數的______倍。

解 (1) ∵細菌數 1 分鐘後增加為原來的 2 倍
∴3 分鐘後的細菌有 $7\times2\times2\times2=7\times2^{3}=56$（個）

(2) 10 分鐘後的細菌有 $7\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2=7\times2^{10}$（個）
同理，15 分鐘後的細菌有 7×2^{15} 個
$\because \dfrac{7\times2^{15}}{7\times2^{10}}=2^{15-10}=2^{5}=32$
∴15 分鐘後的細菌數是 10 分鐘後細菌數的 32 倍

試題 6

試求下列各比例式中的 x 值：

(1) $(2x+5):(x+1)=1:2$。

(2) $\dfrac{5}{4}:\dfrac{2x}{7}=7:4$。

解 (1) $\because (2x+5):(x+1)=1:2$
$\therefore 2\times(2x+5)=1\times(x+1)$
⇨ $4x+10=x+1$
⇨ $3x=-9$
⇨ $x=-3$

(2) $\because \dfrac{5}{4}:\dfrac{2x}{7}=7:4$
$\therefore \dfrac{5}{4}\times4=\dfrac{2x}{7}\times7$
⇨ $5=2x$ ⇨ $x=\dfrac{5}{2}$

試題 7

已知 $x:y=5:2$，試求下列各比的比值：

(1) $3x:4y$ 為______。

(2) $(2x-3y):(x-4y)$ 為______。

解 $\because x:y=5:2$　∴設 $x=5k$，$y=2k$，$k\neq0$

(1) $3x:4y=(3\times5k):(4\times2k)$
$=15k:8k$
⇨ $\dfrac{15k}{8k}=\dfrac{15}{8}$

(2) $(2x-3y):(x-4y)$
$=(2\times5k-3\times2k):(5k-4\times2k)$
$=4k:(-3k)$
⇨ $\dfrac{4k}{-3k}=-\dfrac{4}{3}$

試題 8

已知 x，y，z 均不為 0，若 $x+2y=0$ 且 $3x-4y+z=0$，則 $x:y:z=$______。

解 $\because x+2y=0 \Rightarrow x=-2y$ 代入 $3x-4y+z=0$ 中

得 $3\times(-2y)-4y+z=0$

$\Rightarrow -10y+z=0 \Rightarrow z=10y$

故 $x:y:z=(-2y):y:10y$

$=(-2):1:10$

$=2:(-1):(-10)$

試題 9

已知△ABC 之三邊長各為 a、b、c 且其各邊上的高分別為 h_a、h_b、h_c，

若 $h_a:h_b:h_c=20:12:15$，且△ABC 的周長為 72 公分，

則此△ABC 三邊長各為多少公分？

解 $\because a:b:c=\dfrac{1}{h_a}:\dfrac{1}{h_b}:\dfrac{1}{h_c}=\dfrac{1}{20}:\dfrac{1}{12}:\dfrac{1}{15}=3:5:4$

$\therefore a=72\times\dfrac{3}{3+5+4}=18$（公分）

$b=72\times\dfrac{5}{3+5+4}=30$（公分）

$c=72\times\dfrac{4}{3+5+4}=24$（公分）

故三邊長分別為 18 公分、30 公分、24 公分

試題10

＊若直線方程式 $ax+by=c$ 的圖形通過（-1，2）、（2，1）兩點，則：

⑴ 試求 $a:b:c=$______。

⑵ 若 $a+b+c=90$，則 $2a-3b+c=$______。

解 ⑴ 分別以（-1，2），（2，1）代入 $ax+by=c$ 中，得

$\begin{cases} -a+2b=c \cdots\cdots ① \\ 2a+b=c \cdots\cdots ② \end{cases}$

②$-$①得 $3a-b=0 \Rightarrow b=3a$ 代入①得 $c=5a$

$\Rightarrow a:b:c=a:3a:5a=1:3:5$

⑵ 令 $a=k$，$b=3k$，$c=5k$ 代入 $a+b+c=90$ 中

得 $k+3k+5k=90 \Rightarrow k=10$

$\Rightarrow 2a-3b+c=20-90+50=-20$

第 11 回 等差數列

重點

一、等差數列

1. 數列 a_1，a_2，a_3，……，a_{n-1}，a_n 中，若任意相鄰兩項，後項減去前項所得的差都相等，即 $a_2-a_1=a_3-a_2=\cdots\cdots=a_n-a_{n-1}=d$（常數），則我們稱此數列為等差數列，其中 d 為公差。
2. 設一等差數列的首項為 a_1，公差為 d，第 k 項為 a_k，第 n 項為 a_n，則：
   (1) $a_n=a_1+(n-1)d$。
   (2) 若 $n>k$，則 $a_n=a_k+(n-k)d$。
3. 若 a，b，c 三數成等差數列，則中間項 b 稱為 a 與 c 的等差中項，即 $b-a=c-b$，此時 $2b=a+c$ 或 $b=\dfrac{a+c}{2}$。

＊二、特別項數的等差數列之假設法（目的：方便計算）

1. 若三數成等差數列，則可設此三數為 $a-d$，a，$a+d$。（此時公差為 d）
2. 若四數成等差數列，則可設此四數為 $a-3d$，$a-d$，$a+d$，$a+3d$。（此時公差為 $2d$）
3. 若五數成等差數列，則可設此五數為 $a-2d$，$a-d$，a，$a+d$，$a+2d$。（此時公差為 d）

試題 1

在下列各空格中填入適當的數，使每列數成為等差數列：

(1) 1，4，7，______，______。

(2) -2，______，6，______。

(3) 2，______，______，______，14。

(4) ______，______，7，1，______。

解 (1) 10；13
(2) 2；10
(3) 5；8；11
(4) 19；13；-5

試題 2

若一等差數列的首項 $a_1=3$，公差 $d=-5$，試寫出此等差數列的前 5 項。

解 $a_1=3$

$a_2=3+(-5)=-2$

$a_3=-2+(-5)=-7$

$a_4=(-7)+(-5)=-12$

$a_5=(-12)+(-5)=-17$

故此等差數列的前 5 項為

3，−2，−7，−12，−17

試題 3

若某等差數列的第 3 項為 14，第 7 項為−2，則此數列的首項為______，公差為______，第 16 項為______。

解 設等差數列的首項為 a_1，公差為 d

則 $a_3=a_1+2d=14$ ……………①

$a_7=a_1+6d=-2$ ……………②

②−①得 $4d=-16$ ⇨ $d=-4$

代入①得 $a_1=22$

又 $a_{16}=a_1+15d=22+15\times(-4)=-38$

故首項為 22，公差為−4，第 16 項為−38

試題 4

設 3，7，11，……為一等差數列，則：

⑴ 第 10 項為______。

⑵ 若第 n 項為 59，則 $n=$______。

解 由題意知首項 $a_1=3$，公差 $d=7-3=4$

⑴ $a_{10}=a_1+9d=3+9\times4=39$

⑵ $\because a_n=a_1+(n-1)\times d$

⇨ $3+(n-1)\times4=59$

⇨ $(n-1)\times4=56$

⇨ $n-1=14$ $\therefore n=15$

試題 5

＊設 α，β 為 $x^2-17x+52=0$ 之兩根，若在 α，β 之間插入 a，b 兩數，其中 $a<b$ 使其成為等差數列，則數對（a，b）＝______。

解　$x^2-17x+52=0$

$\Rightarrow (x-4)(x-13)=0 \Rightarrow x=4$ 或 13

亦即在 4 與 13 之間插入 a，b 兩數，其公差為 $\dfrac{13-4}{3}=3$

$\therefore a=4+3=7$，$b=4+3\times 2=10$

故數對（a，b）＝（7，10）

試題 6

已知兩數的乘積 56，等差中項為 9，則此兩數為______。

解　設此兩數為 x，y，由題意知

$$\begin{cases} xy=56 \\ \dfrac{x+y}{2}=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy=56 \cdots\cdots\cdots\cdots ① \\ x+y=18 \cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$$

由②得 $y=18-x$ 代入①得 $x(18-x)=56 \Rightarrow x^2-18x+56=0$

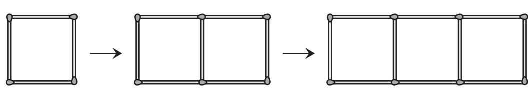
$\Rightarrow (x-4)(x-14)=0 \Rightarrow x=4$ 或 14

代入②得 $y=14$ 或 4

故此兩數為 4 和 14

試題 7

用火柴棒排成正方形，如下：



第一組　　第二組　　第三組

則第 20 組需用______枝火柴棒。

解　第一組用 4 枝火柴棒

之後，每加一組多用 3 枝火柴棒

$\therefore$ 第 20 組需用 $4+(20-1)\times 3=61$（枝）

試題 8

已知等差數列 3，$2\frac{2}{3}$，$2\frac{1}{3}$，2，……，試求：

(1) 第 6 項為______。　　(2) 第______項開始有負數出現。

解 首項 $a_1=3$，公差 $d=2\frac{2}{3}-3=-\frac{1}{3}$

(1) $a_6=3+(6-1)\times\left(-\frac{1}{3}\right)=3-\frac{5}{3}=\frac{4}{3}$

(2) 設第 n 項開始有負數出現

則 $3+(n-1)\times\left(-\frac{1}{3}\right)<0 \Rightarrow \frac{10}{3}-\frac{n}{3}<0$

同乘以 3 得 $10-n<0$

$\therefore n>10$，又 n 為正整數

故第 11 項開始有負數出現

試題 9

＊有一三角形的三內角度數成等差數列，若最大角是最小角的 5 倍，則最小角的度數為______。

解 設此三內角為 $(a-d)^\circ$，a°，$(a+d)^\circ$

則 $\begin{cases}(a-d)+a+(a+d)=180 \cdots\cdots ①\\ a+d=5(a-d) \cdots\cdots ②\end{cases}$

由①得 $3a=180$　$\therefore a=60$

代入②得 $60+d=5(60-d)$

$\Rightarrow 60+d=300-5d \Rightarrow 6d=240$

$\therefore d=40$

$a-d=60-40=20$

故最小角為 20°

試題 10

＊設有四數成等差數列，其和為 20，首末兩項之積為 -11，則此四數為______。

解 設此四數為 $a-3d$，$a-d$，$a+d$，$a+3d$

則 $\begin{cases}(a-3d)+(a-d)+(a+d)+(a+3d)=20 \cdots\cdots ①\\ (a-3d)(a+3d)=-11 \cdots\cdots ②\end{cases}$

由①得 $4a=20$　$\therefore a=5$

代入②得 $(5-3d)(5+3d)=-11$

$\Rightarrow 25-9d^2=-11$

$\Rightarrow 9d^2=36 \Rightarrow d^2=4$　$\therefore d=\pm2$

當 $d=2$ 時，此四數為 -1，3，7，11

當 $d=-2$ 時，此四數為 11，7，3，-1

故此四數為 -1，3，7，11 或 11，7，3，-1

第 12 回

等差級數

重點

1. 如果一等差級數的首項為 a_1，第二項為 a_2，第三項為 a_3，……，第 n 項為 a_n，則此級數的前 n 項和 $S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n$。
2. 若一等差級數共有 n 項，首項為 a_1，第 n 項為 a_n，則前 n 項和 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$。
3. 若一等差級數的首項為 a_1，公差為 d，項數為 n，則前 n 項和 $S_n=\dfrac{n}{2}[2a_1+(n-1)d]$。

說明：

$$\begin{array}{rrcccccccc}
\text{設} & S_n= & a_1 & + & (a_1+d) & +\cdots\cdots+ & [a_1+(n-2)d] & + & [a_1+(n-1)d] \\
+) & S_n= & [a_1+(n-1)d] & + & [a_1+(n-2)d] & +\cdots\cdots+ & (a_1+d) & + & a_1 \\
\hline
 & 2S_n= & [2a_1+(n-1)d] & + & [2a_1+(n-1)d] & +\cdots\cdots+ & [2a_1+(n-1)d] & + & [2a_1+(n-1)d]
\end{array}$$

$$=n\times[2a_1+(n-1)d]$$

$\Rightarrow S_n=\dfrac{n}{2}[2a_1+(n-1)d]$。

4. 設 S_n 表等差級數 $a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n$ 前 n 項之和，則 $a_n=S_n-S_{n-1}$。(其中 $n\geq 2$)

試題 1

等差級數 $1+7+13+\cdots\cdots+$(第 20 項) 之和為______。

解 首項 $a_1=1$，公差 $d=7-1=6$

$S_{20}=\dfrac{20}{2}\times[2\times1+(20-1)\times6]$

$=10\times116$

$=1160$

試題 2

設一等差數列共有 21 項，其首項為 7，公差為 -6，則末項為______，其和為______。

解 末項 $a_{21}=7+(21-1)\times(-6)$

$=7+(-120)$

$=-113$

前 21 項和 $S_{21}=\dfrac{21}{2}\times[7+(-113)]$

$=\dfrac{21}{2}\times(-106)$

$=-1113$

故末項為 -113，和為 -1113

試題 3

設等差級數 $15+18+21+\cdots\cdots$ 到第 n 項的和為 600，則 $n=$______。

解 由題意知首項 $a_1=15$

公差 $d=18-15=3$

則前 n 項和

$S_n=\dfrac{n[2\times15+(n-1)\times3]}{2}=600$

$\Rightarrow n(3n+27)=1200 \Rightarrow n^2+9n-400=0$

$\Rightarrow (n-16)(n+25)=0 \quad \therefore n=16$ 或 $n=-25$（不合）

故 $n=16$

試題 4

某會議室有 12 排座位，後一排比前一排多 2 個座位，已知最後一排有 32 個座位，則該會議室可以容納______人。

解 $a_1=32$，$d=-2$，$n=12$

$S_{12}=\dfrac{12}{2}\times[2\times32+(12-1)\times(-2)]$

$=6\times42=252$

故該會議室可以容納 252 人

試題 5

試求 20 到 300 的正整數中，所有 7 的倍數之和為______。

解 $\because 20\div7=2\cdots\cdots6 \quad \therefore$ 滿足題意之首項 $a_1=21$

$\because 300\div7=42\cdots\cdots6 \quad \therefore$ 滿足題意之末項 $a_n=294$

又公差 $d=7$

由 $a_n=a_1+(n-1)d$ 知 $294=21+(n-1)\times7 \Rightarrow n=40$

故 7 的倍數之和 $=\dfrac{40}{2}\times(21+294)=6300$

試題 6

＊已知一等差級數的前 20 項之和為 -470，前 19 項之和為 -418，試求：

(1) 首項為______。 (2) 公差為______。

解 $a_{20}=S_{20}-S_{19}=(-470)-(-418)=-52$

(1) 設首項為 a_1，則 $S_{20}=\dfrac{20}{2}\times(a_1+a_{20})$

$\Rightarrow \dfrac{20}{2}\times[a_1+(-52)]=-470 \Rightarrow a_1-52=-47 \quad \therefore a_1=5$

(2) 設公差為 d，則 $a_{20}=a_1+(20-1)d$

$\Rightarrow 5+19d=-52 \Rightarrow 19d=-57$

$\therefore d=-3$

試題 7

＊一等差級數的前 n 項和 $S_n=-2n^2+3n$，試求：

⑴ 前 21 項之和為______。　⑵ 第 21 項為______。

解 ⑴ $S_{21}=-2\times 21^2+3\times 21$

$=-882+63=-819$

⑵ $a_{21}=S_{21}-S_{20}$

$=(-2\times 21^2+3\times 21)-(-2\times 20^2+3\times 20)$

$=(-819)-(-740)=-79$

試題 8

＊在 55 與 143 之間插入 10 個數，使所成的 12 個數成一等差數列，則：

⑴ 公差 $d=$______。　⑵ 所插入的第 9 個數為______。

⑶ 所插入的 10 個數之和為______。

解 ⑴ 設首項 $a_1=55$，$a_{12}=143$

$\because a_{12}=a_1+11d$　$\therefore 143=55+11d$ ⇨ $d=8$

⑵ 所插入的第 9 個數 $a_{10}=a_1+9d=55+9\times 8=127$

⑶ 所插入的第 1 個數 $a_2=a_1+d=55+8=63$

所插入的第 10 個數 $a_{11}=a_1+10d=55+10\times 8=135$

故所求為 $10(63+135)\div 2=990$

試題 9

＊設一次函數 $f(n)=200-3n$，n 為正整數，欲使 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots\cdots+f(n)$ 的和為最大，則：

⑴ n 值為______。　⑵ 最大的和為______。

解 ⑴ 欲使其和最大，則必 $f(n)\geq 0$

即 $200-3n\geq 0$ ⇨ $3n\leq 200$ ⇨ $n\leq 66\dfrac{2}{3}$

$\because n$為正整數　$\therefore$取 $n=66$

⑵ $f(1)=200-3=197$，$f(66)=200-3\times 66=2$

⇨ 最大的和 $S_{66}=\dfrac{66}{2}(197+2)=33\times 199=6567$

試題 10

＊有一等差級數，首項為-32，第 17 項為-20，試求：

⑴ 第______項開始為正數。　⑵ 自第 1 項加到第______項時，開始為正數。

解 設公差為 d，則$-32+16d=-20$ ⇨ $d=\dfrac{3}{4}$

⑴ 設第 k 項開始為正數，則$-32+(k-1)\times\dfrac{3}{4}>0$ ⇨ $\dfrac{3}{4}\times(k-1)>32$

⇨ $k-1>42\dfrac{2}{3}$ ⇨ $k>43\dfrac{2}{3}$，取 $k=44$，故第 44 項開始為正數

⑵ 設前 n 項的和開始為正數

$\dfrac{n}{2}\left[2\times(-32)+(n-1)\times\dfrac{3}{4}\right]>0$　$\because n>0$ ⇨ $-64+\dfrac{3}{4}(n-1)>0$

⇨ $\dfrac{3}{4}(n-1)>64$ ⇨ $n-1>85\dfrac{1}{3}$ ⇨ $n>86\dfrac{1}{3}$　$\therefore$取 $n=87$

故加到第 87 項開始為正數

實力檢測 4

年 月 日 分

範圍：10～12 回複習

計算題（每題 10 分，若有 2 小題，每小題 5 分，共 100 分）

1. 設兩數的積為 105，等差中項為 11，則此兩數為＿＿＿。

解 設兩數為 x，y

$$\Rightarrow \begin{cases} xy=105 \\ \dfrac{x+y}{2}=11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy=105 \cdots\cdots ① \\ x+y=22 \cdots\cdots ② \end{cases}$$

由②得 $y=22-x$ 代入①得 $x(22-x)=105$

$\Rightarrow 22x-x^2=105 \Rightarrow x^2-22x+105=0 \Rightarrow (x-7)(x-15)=0$

$\Rightarrow x=7$ 或 $x=15$ 分別代入②得 $y=15$ 或 $y=7$

故此兩數為 7，15

* 2. 設等差級數共有 21 項，若第 11 項為 8，則此等差級數之和為＿＿＿。

解 ∵第 11 項為 8 ∴$a_{11}=a_1+10d=8$

$$\Rightarrow \text{等差級數之和 } S_{21}=\frac{21}{2}\times[2a_1+(21-1)d]$$
$$=\frac{21}{2}\times(2a_1+20d)$$
$$=21\times(a_1+10d)$$
$$=21\times8=168$$

3. 已知 a_1，a_2，a_3，a_4，a_5，a_6，a_7 七數成等差數列，若 $a_2=-3$，$a_4=5$，則：

(1) $a_6=$＿＿＿。 (2) $a_1+a_7=$＿＿＿。

解 (1) $\because a_4=\dfrac{a_2+a_6}{2}$ $\therefore 5=\dfrac{-3+a_6}{2}$

$\Rightarrow a_6=13$

(2) $\because a_4=\dfrac{a_1+a_7}{2}$

$\therefore a_1+a_7=2\times a_4=2\times5=10$

4. 等差數列 a_1，a_2，a_3，……，a_n 中，若 $a_3-a_2=6$，則 $a_{330}-a_{20}=$______。

解 $\because a_3-a_2=6$　$\therefore$公差 $d=6$

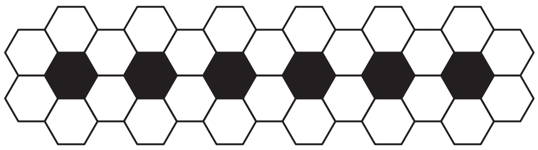
⇨ $a_{330}-a_{20}=[a_1+(330-1)d]-[a_1+(20-1)d]$

$=310d$

$=310\times6$

$=1860$

5. 有一長條型鏈子，其外型由邊長為 1 公分的正六邊形排列而成。右圖表示此鏈之任一段花紋，其中每個黑色六邊形與 6 個白色六邊形相鄰。若鏈子上有 35 個黑色六邊形，則此鏈子共有______個白色六邊形。



解 $\because a_1=6$，$a_2=10$

$\therefore$公差 $d=10-6=4$

⇨ $a_{35}=6+(35-1)\times4=142$

6. 計算 $(15-22)^3\div(9-16)^2-(3-4)^2\times(3^2-4^2)=$______。

解 $(15-22)^3\div(9-16)^2-(3-4)^2\times(3^2-4^2)$

$=(-7)^3\div(-7)^2-(-1)^2\times(9-16)$

$=-7-1\times(-7)$

$=-7+7=0$

7. 若 $a=5^8\times2^8$，$b=81^4$，$c=2^{24}$，則 a，b，c 的大小順序為______。

解 $a=5^8\times2^8=(5\times2)^8=10^8$

$b=81^4=(9^2)^4=9^8$

$c=2^{24}=(2^3)^8=8^8$

$\because 10^8>9^8>8^8$

$\therefore a>b>c$

＊8. 有 a，b，c 三數，且 $abc \neq 0$，若 $(a+b):(b+c):(c+a)=5:6:7$，
則 $a:b:c=$______。

解 令 $\begin{cases} a+b=5k \cdots\cdots ① \\ b+c=6k \cdots\cdots ② \text{且 } k\neq 0 \\ c+a=7k \cdots\cdots ③ \end{cases}$

由①＋②＋③得 $2(a+b+c)=18k$

⇨ $a+b+c=9k \cdots\cdots ④$

⇨ ④－②得 $a=3k$

④－③得 $b=2k$

④－①得 $c=4k$

故 $a:b:c=3k:2k:4k=3:2:4$

9. 一多邊形的周長為 158 公分，它的邊長形成公差為 3 公分的等差數列，已知最長的邊長為 44 公分，則此多邊形的邊數為______。

解 設多邊形的邊數為 n

可將最長邊 44 公分視為首項，而公差為（-3）公分

$\therefore \dfrac{n}{2}[2\times 44+(n-1)(-3)]=158$ ⇨ $n(-3n+91)=316$

⇨ $3n^2-91n+316=0$ ⇨ $(n-4)(3n-79)=0$

$\therefore n=4$ 或 $n=\dfrac{79}{3}$（不合）

故此多邊形為四邊形

10. 某校一年級與二年級的學生人數比為 $3:2$，已知一年級的學生中，有 40 % 視力良好，二年級的學生中，有 30 % 視力良好，問一、二年級的所有學生中，有______% 的學生視力良好。

解 設一年級有 $3x$ 人，則二年級有 $2x$ 人，其中 $x\neq 0$

又一年級學生視力良好的有 $3x\times 40\%=1.2x$（人）

二年級學生視力良好的有 $2x\times 30\%=0.6x$（人）

故一、二年級視力良好的學生比例為

$\dfrac{1.2x+0.6x}{3x+2x}=\dfrac{1.8x}{5x}=0.36=36\%$

頁碼

第 1 回 乘法公式

3 試題

1. (1) $6x^2-7x-5$；(2) $12x^2-xy-6y^2$
2. (1) $9x^2+6x+1$；(2) $25x^2+20xy+4y^2$
3. (1) $25x^2-30xy+9y^2$；(2) $9a^2-6ab+b^2$
4. (1) $4x^2-y^2$；(2) $4a^2-4ab+b^2-9$
5. (1) x^3+8y^3；(2) x^3-8
6. (1) $8x^3+12x^2y+6xy^2+y^3$；
   (2) $27x^3-54x^2y+36xy^2-8y^3$
7. $x^3+9x^2+26x+24$
8. $x^2+4y^2+9z^2+4xy-12yz-6xz$
9. (1) 93025；(2) 25599；(3) 215992；(4) 970299
10. (1) 19；(2) 80；(3) 13

第 2 回 因式分解

6 試題

1. (1) $2y(x+y)(x+3y)$；(2) $xy(x-y+3)$
2. (1) $(a-2x)(3a-5b)$；(2) $(a+c)(b^2-ac)$
3. (1) $(x^2-x+1)(x^2+1)$；
   (2) $(x^2-x-1)(x+2)(x-2)$
4. (1) $(x^2+4)(3x+1)(3x-1)$；
   (2) $(x+1)(x^2-x+1)(x-2)(x^2+2x+4)$
5. (1) $(3x-3y-1)(5x-5y+2)$；
   (2) $2b(-3a+5b)$
6. (1) $(2x+3y)^2$；(2) $(5x-6y)^2$
7. (1) $(x^2+1)(x+1)(x-1)$；
   (2) $(a+b-c)(a-b+c)$
8. (1) $(3x+2)(9x^2-6x+4)$；
   (2) $(x-4y)(x^2+4xy+16y^2)$
9. (1) $(x+2)^3$；(2) $(2x-y)^3$
10. (1) $(3x^2+xy-y^2)(3x^2-xy-y^2)$；
    (2) $(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$

第 3 回 平方根與立方根

9 試題

1. (1) $15\sqrt{6}$；(2) $\dfrac{\sqrt[3]{2}}{2}$
2. (1) $\sqrt{15}$；(2) $\dfrac{\sqrt{7}}{3}$
3. (1) $\sqrt[3]{12}$；(2) $\dfrac{5}{4}$
4. (1) $\sqrt{2}-2\sqrt{5}$；(2) $-16+10\sqrt{30}$
5. (1) $\sqrt{7}-\sqrt{5}$；(2) $\dfrac{3+\sqrt{2}}{7}$
6. $1-\sqrt{2}$　7. $\sqrt{7}-\sqrt{5}$
8. (1) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$；(2) $3-2\sqrt{2}$
9. $a<b$　10. $14\dfrac{1}{14}$

13 實力檢測 1

1. (1) 88804；(2) 809991
2. (1) $(a+b+1)(a+b-4)$；
   (2) $(2x-1)(x+1)(5x+2)$
3. (1) $(2x+1)(x-3)(3x-2)(x+4)$；
   (2) $(x-5)(x+3)(x-3)$
4. (1) 34；(2) ±2　5. (1) $\dfrac{63}{10}$；(2) $\dfrac{25}{4}$
6. (1) $9\sqrt{2}-\sqrt{3}$；(2) 2　7. (1) 14；(2) 52
8. -4　9. -1　10. $(-10,2)$

---------------------- 《難題解析》 ----------------------

9. $$\frac{1}{2-\sqrt{3}}-\frac{2}{\sqrt{11}-3}+\frac{8}{\sqrt{11}+\sqrt{3}}$$
$$=\frac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}-\frac{2(\sqrt{11}+3)}{(\sqrt{11}-3)(\sqrt{11}+3)}+\frac{8(\sqrt{11}-\sqrt{3})}{(\sqrt{11}+\sqrt{3})(\sqrt{11}-\sqrt{3})}$$
$$=(2+\sqrt{3})-\frac{2(\sqrt{11}+3)}{2}+\frac{8(\sqrt{11}-\sqrt{3})}{8}$$
$$=(2+\sqrt{3})-(\sqrt{11}+3)+(\sqrt{11}-\sqrt{3})$$
$$=2+\sqrt{3}-\sqrt{11}-3+\sqrt{11}-\sqrt{3}$$
$$=-1$$

10. $$(3x+a)(x-5)$$
$$=3x^2+ax-15x-5a$$
$$=3x^2+(a-15)x-5a$$
比較係數得 $\begin{cases}a-15=-13\\ m=-5a\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=2\\ m=-10\end{cases}$

故數對 $(m,a)=(-10,2)$

簡答篇

翰林用心 教師用 精益求精

頁碼

第4回 方程式

16 試題

1.(1) $x=1$；(2)無限多解；(3)無解

2.(1)無限多解；(2)無解

3.25　4.(1) $x=2$，$y=1$；(2) $x=3$，$y=8$

5.1100　6.(A)(D)

7.$x=5$ 或 -3，表此兩點到 1 之距離皆為 4

8.(1) $x=\frac{4}{3}$ 或 $x=-\frac{8}{3}$；(2) $x=\frac{4}{3}$ 或 $x=-\frac{4}{3}$

9.(1) $x=3$；(2) $x=0$ 或 $x=3$

10.(1) $x=2$，$y=-1$；(2) $x=3$，$y=\frac{1}{2}$

第5回 一元二次方程式

20 試題

1.(1) $x=-10$ 或 $x=9$；(2) $x=-3$ 或 $x=-\frac{2}{3}$；

(3) $x=-2$ 或 $x=\frac{7}{5}$

2.(1) $x=-4\pm\sqrt{13}$；(2) $x=1\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$；

(3)無解

3.(1) $x=\frac{1\pm\sqrt{13}}{3}$；(2) $x=-\frac{1}{3}$（重根）；

(3)無解

4.(A)(C)　5.0 或 4　6.$k<\frac{9}{8}$

7.(1) 34；(2) -172；(3) $\frac{4}{9}$

8.$x=2$ 或 $x=\frac{2}{5}$　9.15　10.40

第6回 不等式

24 試題

1.(1) $x\leq 2$，圖略；(2) $x>\frac{11}{4}$，圖略

2.$x\leq -2$，圖略　3.$x>4$，圖略

4.$-3<x\leq 5$，圖略　5.$\frac{11}{3}$

6.$-\frac{17}{4}<x\leq -4$，圖略

7.3 或 4 或 5

頁碼

8.(1) $-3<x<3$，圖略；

(2) $x\geq 3$ 或 $x\leq -3$，圖略

9.(1) $-3\leq x\leq 4$，圖略；

(2) $x>2$ 或 $x<-\frac{4}{3}$，圖略

10.$-1\leq x<1$ 或 $-4<x\leq -2$，圖略

實力檢測 2

27

1.$x=8$　2.$x=\frac{67}{7}$

3.(1) $x=\frac{4}{3}$ 或 $x=-\frac{5}{2}$；(2) $x=\frac{-5\pm\sqrt{133}}{6}$

4.$x=1$ 或 $x=\frac{1}{3}$

5.$x<-\frac{32}{11}$

6.$x\leq -2$ 或 $x\geq 3$

7.(1) -5；(2) $-\frac{3}{2}$

8.3　9.21；21　10.80

《難題解析》

9. 設全班有 x 人

則男生有 $\left(\frac{4}{7}x-3\right)$ 人，

女生有 $\left(\frac{1}{6}x+14\right)$ 人

$\therefore \left(\frac{4}{7}x-3\right)+\left(\frac{1}{6}x+14\right)=x$

$\Rightarrow \frac{24}{42}x+\frac{7}{42}x-x=-14+3$

$\Rightarrow \frac{-11}{42}x=-11 \Rightarrow x=42$

$\therefore$男生有 $42\times\frac{4}{7}-3=21$（人），

女生有 $42\times\frac{1}{6}+14=21$（人）

10. 設每個攤位邊長為 x 公尺，由題意知

$2(90-2x)x+2(42-2x)x=720$

$\Rightarrow 180x-4x^2+84x-4x^2=720$

$\Rightarrow 8x^2-264x+720=0$

$\Rightarrow x^2-33x+90=0$

$\Rightarrow (x-3)(x-30)=0$

$\Rightarrow x=3$ 或 30（不合）

$\because$每個攤位面積為 9 平方公尺

又 $720\div 9=80$

故共有 80 個攤位

頁碼

第7回 函數與線性函數

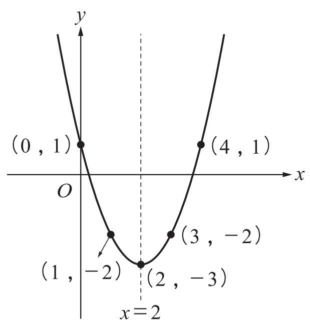
30 試題

1. (1) 7；(2) 11；(3) -3
2. $(-5，6)$；$3x^2-5x+6$
3. 略　4. 略　5. (B)
6. (1) $(-3，0)$；(2) $(0，3)$；
   (3) $(-1，4)$；(4) $3:4$
7. (1) $y=f(x)=21x-378$；(2) 18；(3) 987

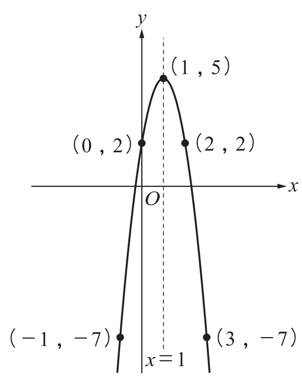
第8回 二次函數

33 試題

1. 頂點為 $(2，-3)$，對稱軸為 $x=2$



2. 頂點為 $(1，5)$，對稱軸為 $x=1$



3. (1)最小值為 $-\dfrac{10}{3}$；(2)最大值為 $-\dfrac{5}{2}$
4. (1)最大值為 9，最小值為 1；
   (2)最大值為 8，最小值為 0
5. $(2，-3，4)$
6. $(30，-77)$
7. 2　8. $y=2x^2-20x+49$
9. $\dfrac{9}{2}$　10. $a>0$，$b<0$，$c<0$，$b^2-4ac>0$

第9回 多項式

37 試題

1. (1) $-x^2-5x+8$；(2) $5x^2-4x-3$
2. (1) $-2x^2+6x-5$；(2) $-8x^2+10$
3. $3x^3+7x^2-15x+6$
4. $15x^4+9x^3-11x^2-3x+2$
5. (1) $x^4+6x^3-13x^2-66x+72$；(2) -13
6. 3　7. $2x^2-9x+27$；-35
8. $2x-3$；$-4x+11$
9. $(17，-1)$　10. -30

實力檢測 3

40

1. $4x^2+x-19$　2. x^2-3x-2
3. $(3，-8)$　4. $(0，7)$
5. $\dfrac{2}{3}$ 或 $-\dfrac{5}{2}$　6. $\left(-\dfrac{3}{2}，6\right)$
7. $y=-x^2+9$　8. $(12，-17)$
9. $\left(-\dfrac{2}{3}，\dfrac{1}{3}\right)$　10. 48

《難題解析》

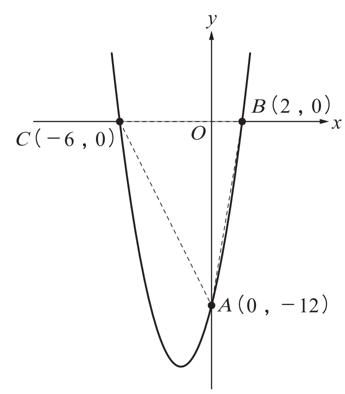
9. 由 $y=-\dfrac{2}{3}x^2+b$ 向上平移 $\dfrac{5}{3}$ 個單位

   可得 $y=-\dfrac{2}{3}x^2+\left(b+\dfrac{5}{3}\right)$ 的函數圖形

   比較係數得 $a=-\dfrac{2}{3}$，$b+\dfrac{5}{3}=2 \Rightarrow b=\dfrac{1}{3}$

   故數對 $(a，b)=\left(-\dfrac{2}{3}，\dfrac{1}{3}\right)$

10.



令 $x=0 \Rightarrow y=-12$
$\therefore$ 與 y 軸的交點為 $A(0，-12)$
令 $y=0$
$\Rightarrow x^2+4x-12=0$
$\Rightarrow (x-2)(x+6)=0$
$\Rightarrow x=2$ 或 -6
$\therefore$ 與 x 軸的交點為 $B(2，0)$，$C(-6，0)$
故 $\triangle ABC$ 的面積

$=\dfrac{1}{2}\times|2-(-6)|\times12$

$=\dfrac{1}{2}\times8\times12=48$

第10回 指數與比例式

43 試題

1.(1) 125；(2) 1；(3) -8；(4) -8；

(5) 16；(6) -16；(7) $\frac{1}{81}$；(8) $\frac{1}{32}$

2.(1) 7；(2) 80；(3) 27；(4) 3

3.(1) $10^8>3^{16}>2^{24}$；(2) $4^{12}>2^{20}>8^6$；

(3) $(-6)^{10}>(-6)^8>(-6)^9$

4.(1) 49；(2) 10

5.(1) 56；(2) 32

6.(1) -3；(2) $\frac{5}{2}$

7.(1) $\frac{15}{8}$；(2) $-\frac{4}{3}$

8.$2:(-1):(-10)$

9.18 公分、30 公分、24 公分

10.(1) $1:3:5$；(2) -20

第11回 等差數列

47 試題

1.(1) 10；13；(2) 2；10；(3) 5；8；11；

(4) 19；13；-5

2.3，-2，-7，-12，-17

3.22；-4；-38

4.(1) 39；(2) 15

5.（7，10）

6.4 和 14　7.61

8.(1) $\frac{4}{3}$；(2) 11

9.20°

10.-1，3，7，11 或 11，7，3，-1

第12回 等差級數

51 試題

1.1160　2.-113；-1113

3.16　4.252　5.6300

6.(1) 5；(2) -3

7.(1) -819；(2) -79

8.(1) 8；(2) 127；(3) 990

9.(1) 66；(2) 6567

10.(1) 44；(2) 87

54 實力檢測 4

1.7，15　2.168　3.(1) 13；(2) 10　4.1860

5.142　6.0　7.$a>b>c$　8.$3:2:4$　9.4

10.36

《難題解析》

9. 設多邊形的邊數為 n

可將最長邊 44 公分視為首項，

而公差為（-3）公分

$\therefore \frac{n}{2}[2\times 44+(n-1)(-3)]=158$

⇨ $n(-3n+91)=316$

⇨ $3n^2-91n+316=0$

⇨ $(n-4)(3n-79)=0$

$\therefore n=4$ 或 $n=\frac{79}{3}$（不合）

故此多邊形為四邊形

10. 設一年級有 $3x$ 人，則二年級有 $2x$ 人，

其中 $x\neq 0$

又一年級學生視力良好的有

$3x\times 40\%=1.2x$（人）

二年級學生視力良好的有

$2x\times 30\%=0.6x$（人）

故一、二年級視力良好的學生比例為

$\frac{1.2x+0.6x}{3x+2x}=\frac{1.8x}{5x}=0.36=36\%$

Note

Note