

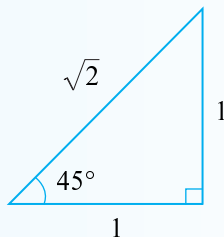
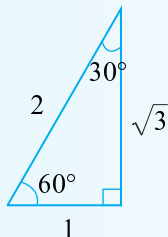
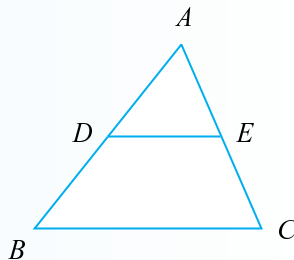
第七章 簡易幾何

7-1 三角形



本節重點

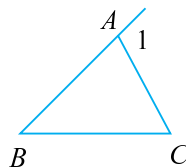
1. 三角形的三個內角和為 180° ，外角和為 360° ，任一外角等於它的二個內對角和（**外角定理**）。
2. 全等三角形的對應角相等，對應邊也相等。
3. 三角形的全等性質： SSS ， SAS ， ASA ， AAS ， RHS 。
4. 如圖，在 $\triangle ABC$ 中
 - (1) 已知 $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ，則 $\overline{AD} : \overline{DB} = \overline{AE} : \overline{EC}$
 $\overline{AB} : \overline{AD} = \overline{AC} : \overline{AE}$
 $= \overline{BC} : \overline{DE}$
 - (2) 已知 $\overline{AD} : \overline{DB} = \overline{AE} : \overline{EC}$ ，則 $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$
5. 三角形的三心
 - (1) **內心**為**三內角平分線**的交點，內心到三邊等距；在 $\triangle ABC$ 中， I 為內心，則 $\triangle AIB : \triangle BIC : \triangle CIA = \overline{AB} : \overline{BC} : \overline{CA}$
 - (2) **外心**為**三邊垂直平分線**的交點，外心到三頂點等距。
 - (3) **重心**為**三邊中線**的交點，重心到頂點的距離等於重心到對邊中點距離的二倍；在 $\triangle ABC$ 中， G 為重心，則 $\triangle AGB = \triangle BGC = \triangle CGA$ 。
6. 假設正三角形的邊長為 a ，則其高為 $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ ，面積為 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ 。
7. 在直角三角形中
 - (1) 30° 所對的邊： 60° 所對的邊： 90° 所對的邊 = $1 : \sqrt{3} : 2$ 。
 - (2) 45° 所對的邊： 45° 所對的邊： 90° 所對的邊 = $1 : 1 : \sqrt{2}$ 。
8. 在直角三角形中，斜邊上的中線 = 斜邊的一半。
9. 若兩個三角形相似，則其面積比 = 對應邊長的平方比。



▶ 範例 1 外角定理

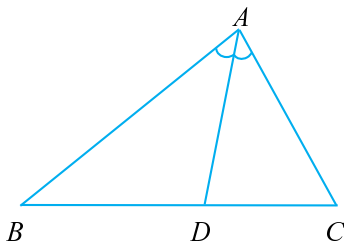
如圖， $\triangle ABC$ 中， $\angle 1$ 為 $\angle A$ 之外角，試證 $\angle 1 = \angle B + \angle C$ 。

- 證明：**
- (1) $\because \angle 1$ 為 $\angle A$ 之外角
 $\therefore \angle 1 + \angle A = 180^\circ$ (平角)
 - (2) $\because \angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ (三內角和)
 由(1)、(2)得 $\angle 1 + \angle A = \angle A + \angle B + \angle C$
 $\therefore \angle 1 = \angle B + \angle C$

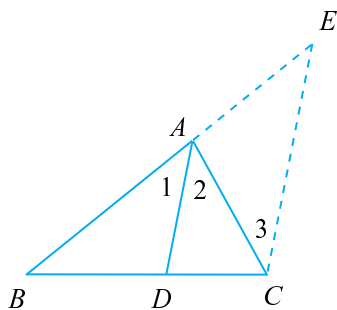


▶ 範例 2 內分比性質

如圖，在 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AD}$ 平分 $\angle BAC$ ，試證 $\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{DC}$ 。



- 證明：**
- (1) 過 C 點作 $\overline{CE}$ ，使得 $\overline{CE} \parallel \overline{AD}$ 且交 $\overline{AB}$ 的延長線於 E 點
 - (2) $\because \overline{AD} \parallel \overline{CE}$
 $\therefore \angle 1 = \angle E$ (同位角相等)
 $\angle 2 = \angle 3$ (內錯角相等)
 又 $\because \overline{AD}$ 平分 $\angle BAC$
 $\therefore \angle 1 = \angle 2$
 故 $\angle E = \angle 3$
 在 $\triangle CAE$ 中
 $\because \angle E = \angle 3$
 $\therefore \overline{AC} = \overline{AE}$
 - (3) 在 $\triangle BCE$ 中
 $\because \overline{AD} \parallel \overline{CE}$
 $\therefore \overline{AB} : \overline{AE} = \overline{BD} : \overline{DC}$
 - (4) 由(2)、(3)知
 $\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{DC}$



● 學生練習 ●

已知 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = 12$ 公分， $\overline{AC} = 5$ 公分， $\overline{BC} = 13$ 公分， $\angle A$ 之角平分線 $\overline{AD}$ 交 $\overline{BC}$ 於 D 點，試求 $\overline{BD} : \overline{CD}$ 。

▶ 範例 3 外分比性質

在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A$ 的外角平分線交 $\overline{BC}$ 之延長線於 D 點，試證 $\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{CD}$ 。

證明：(1) 過 C 點，作 $\overline{CE}$ ，使得 $\overline{CE} \parallel \overline{AD}$ 且交 $\overline{AB}$ 於 E 點

(2) $\because \overline{AD} \parallel \overline{CE}$

$\therefore \angle 1 = \angle 4, \angle 2 = \angle 3$

又 $\overline{AD}$ 為 $\angle A$ 的外角平分線

$\therefore \angle 1 = \angle 2$ ，故 $\angle 3 = \angle 4$

在 $\triangle ACE$ 中

$\therefore \angle 3 = \angle 4$

$\therefore \overline{AE} = \overline{AC}$

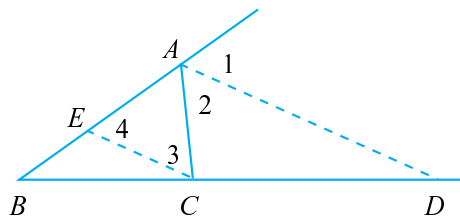
(3) 在 $\triangle ABD$ 中

$\because \overline{CE} \parallel \overline{AD}$

$\therefore \overline{BA} : \overline{EA} = \overline{BD} : \overline{CD}$

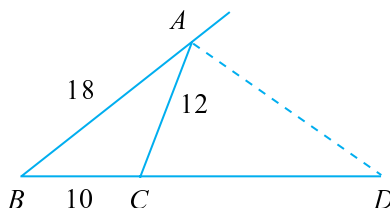
(4) 由(2)、(3)知

$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{CD}$



● 學生練習 ●

如圖，在 $\triangle ABC$ 中，已知三邊長為 10、12、18， $\overline{AD}$ 為 $\angle A$ 之外角平分線，則 $\overline{CD} =$ 。

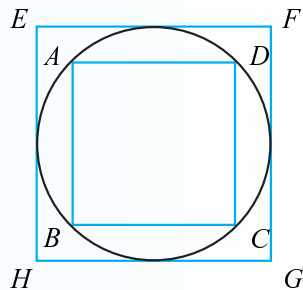


7-2 四邊形與圓形

本節重點

1. 四邊形的內角和為 360° ，外角和為 360° 。
2. 四邊形中：
 - (1) 四個角均為直角者，稱為長方形。
 - (2) 四個邊都相等者，稱為菱形。
 - (3) 四個邊都相等且四個角均為直角，稱為正方形。
 - (4) 有二雙平行邊者，稱為平行四邊形。
 - (5) 有一雙平行邊，另一雙邊不平行者，稱為梯形。
3. 菱形之對角線互相垂直平分。
4. 平行四邊形的性質：
 - (1) 二雙對邊分別相等。
 - (2) 二雙對角分別相等。
 - (3) 對角線互相平分。
 - (4) 一條對角線把它分成兩個全等三角形。
5. 判別平行四邊形的方法：若一四邊形有以下任一條件，即為平行四邊形。
 - (1) 二雙對邊互相平行。
 - (2) 二雙對邊分別相等。
 - (3) 二雙對角分別相等。
 - (4) 二對角線互相平分。
 - (5) 一雙對邊平行且相等。
6. 梯形中線性質：

梯形兩不平行邊中點的連線平行於底邊且長度為（上底長＋下底長）的一半。
7. 如圖
 - (1) 四邊形 $ABCD$ 稱為圓之內接四邊形，其中頂點 A 、 B 、 C 、 D 必須落在圓上。
 - (2) 四邊形 $EFGH$ 稱為圓之外切四邊形，其中四邊 $\overline{EF}$ 、 $\overline{FG}$ 、 $\overline{GH}$ 、 $\overline{EH}$ 必須與圓相切。
 - (3) 此圓稱為四邊形 $EFGH$ 之內切圓，又稱為四邊形 $ABCD$ 之外接圓。



▶ 範例 1

如圖，已知 $\triangle ABC$ 為直角三角形，其中 $\angle ABC = 90^\circ$ ，且 $\overline{AB} = 4$ ， $\overline{AC} = 5$ ，求 $\triangle ABC$ 的內切圓半徑。

解： 由商高定理知 $\overline{BC} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$

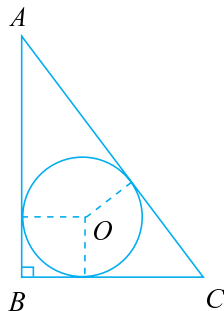
設 $\triangle ABC$ 的內切圓半徑為 x

$$\triangle ABC = \triangle AOB + \triangle BOC + \triangle AOC$$

$$= \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times x + \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times x + \frac{1}{2} \times \overline{AC} \times x$$

$$= \frac{1}{2} \times 4 \times x + \frac{1}{2} \times 3 \times x + \frac{1}{2} \times 5 \times x = 6x$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6x \Rightarrow x = 1$$



● 學生練習 ●

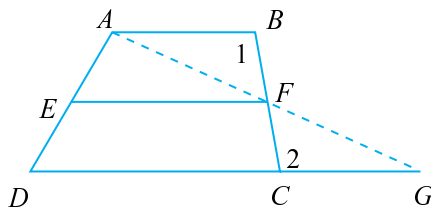
設 $\triangle ABC$ 的三中線 $\overline{AD}$ 、 $\overline{BE}$ 、 $\overline{CF}$ 相交於 G ，且 $\overline{AD} = 24$ ， $\overline{BE} = 30$ ， $\overline{CF} = 42$ ，求 $\overline{AG} + \overline{BG} + \overline{CG}$ 的長。

▶ 範例 2

已知 $ABCD$ 為一梯形， $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ， E 、 F 分別為 $\overline{AD}$ 、 $\overline{BC}$ 的中點，則試證：

(1) $\overline{EF} \parallel \overline{CD}$

(2) $\overline{EF} = (\overline{AB} + \overline{CD}) \times \frac{1}{2}$



證明： (1) 連接 $\overline{AF}$ 且延長 $\overline{AF}$ 交 $\overline{CD}$ 的延長線於 G

(2) 在 $\triangle AFB$ 與 $\triangle GFC$ 中

$$\because \overline{AB} \parallel \overline{CG}$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 2$$

$$\text{又 } \angle AFB = \angle GFC, \overline{BF} = \overline{CF}$$

$$\therefore \triangle AFB \cong \triangle GFC \text{ (利用 ASA 性質)}$$

$$\text{故 } \overline{AF} = \overline{GF}, \overline{AB} = \overline{CG}$$

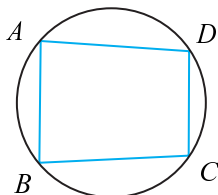
(3) 在 $\triangle ADG$ 中

$$\because \overline{AE} = \overline{ED}, \overline{AF} = \overline{FG}$$

$$\therefore \overline{EF} \parallel \overline{DC} \text{ 且 } \overline{EF} = \frac{1}{2} \overline{DG} = \frac{1}{2} (\overline{DC} + \overline{CG}) = \frac{1}{2} (\overline{CD} + \overline{AB})$$

▶ 範例 3

如圖，已知 $ABCD$ 為圓內接四邊形，試證： $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$ 。



證明： $\angle ABC = \frac{1}{2} \widehat{ADC}$

(圓周角 = 所對弧的一半)

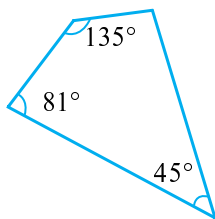
$\angle ADC = \frac{1}{2} \widehat{ABC}$

$\therefore \angle ABC + \angle ADC = \frac{1}{2} \times 360^\circ = 180^\circ$

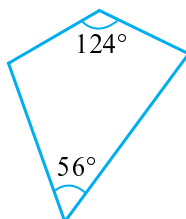
● 學生練習 ●

判別下列各四邊形，哪些一定是圓的內接四邊形？

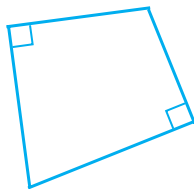
(1)



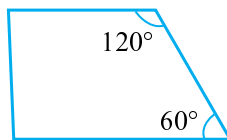
(2)



(3)



(4)



自我評量

1. 已知 $\triangle ABC$ 為正三角形， O 為內心且 $\overline{OA} = 6$ ，求 $\triangle ABC$ 的面積。
2. 圓內接四邊形 $ABCD$ 中， $\angle A : \angle B : \angle C = 4 : 5 : 2$ ，求 $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 、 $\angle D$ 的度數。
3. 直角三角形 ABC 中， $\angle B = 90^\circ$ ， $\overline{BD}$ 平分 $\angle ABC$ 交 $\overline{AC}$ 於 D 點，且 $\overline{BC} = 6$ ， $\overline{AB} = 8$ ，求 $\overline{CD}$ 的長度。