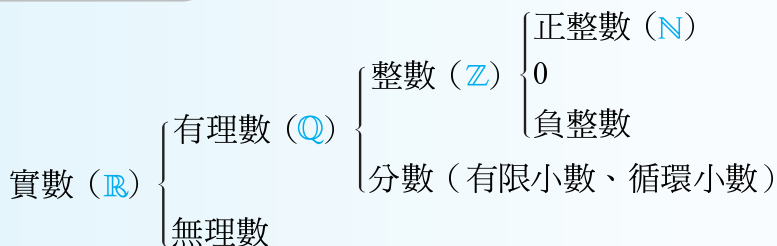


第一章 數

1-1 數的概念



本節重點



◎說明◎

1. **正整數**：又稱為**自然數**，代號 $\mathbb{N}$ 。即1、2、3、4、……。
注意：1為最小正整數。
2. **負整數**：即-1、-2、-3、-4、……。
注意：-1為最大負整數。
3. **整數**：正整數、0、負整數統稱為整數，代號 $\mathbb{Z}$ 。
注意：0為整數，但不為正整數。
4. **分數**：凡能寫成 $\frac{q}{p}$ 的數，其中 $p \neq 0$ 且 p 、 q 為整數，稱為分數。例如：
 $2\frac{3}{4}$ 、 $\frac{7}{5}$ 、 $-\frac{3}{10}$ 皆為分數。
注意：若將分數化成小數時，可分為有限小數和循環小數。
(1) **有限小數**：小數點後，位數為有限個的小數。
例如：0.38、1.414。
(2) **循環小數**：小數點後，有部分位數不停重複出現的小數。
例如： $0.333\cdots = 0.\bar{3}$ ， $0.2838383\cdots = 0.2\bar{83}$ 。
5. **有理數**：所有整數、分數，合稱為有理數，代號 $\mathbb{Q}$ 。
例如： 5 、 $\frac{1}{2}$ 、 $-\frac{2}{3}$ 、 -28 。
6. **無理數**：不可化成分數的數。例如：不循環又無限的小數或開方開不盡的數。例如： $\sqrt{2}$ 、 π 、 $0.12345\cdots$ 。
7. **實數**：有理數和無理數，合稱為實數，代號 $\mathbb{R}$ 。亦即數線上所有點所代表的數字。例如： 3 、 -5 、 $\frac{3}{5}$ 、 π 、 $\sqrt{3}$ 。

老師注意：新教材中未曾提及「有理數」、「無理數」、「實數」三個名詞，老師可針對這三個名詞再作說明。

▶ 範例 1

請問 $\frac{2}{3}$ 、 π 、 $0.\overline{78}$ 、 -5 、 $\sqrt{3}$ 、 $\sqrt{25}$ 、 0.71828 、 $0.1010010001\cdots$ 哪些是有理數？

解： $\frac{2}{3}$ 為分數

-5 、 $\sqrt{25}=5$ 均為整數

$0.\overline{78}$ 為循環小數

0.71828 為有限小數

π 、 $\sqrt{3}$ 、 $0.1010010001\cdots$ 均無法化成分數，故為無理數

$\therefore$ 有理數有 $\frac{2}{3}$ 、 -5 、 $\sqrt{25}$ 、 $0.\overline{78}$ 、 0.71828

● 學生練習 ●

請問 $\frac{5}{7}$ 、 $\sqrt{9}$ 、 0.3 、 $\sqrt{5}$ 、 -2 、 $2.54617\cdots$ 哪些是有理數？

1-2 因數與倍數

本節重點

- 有三個不為 0 的整數 a 、 b 、 c ，若 $a \div b = c$ 即 $a = bc$ ，則 b 稱為 a 的因數， a 稱為 b 的倍數。
- 注意：1 是任何數的因數，任何數均為 1 的倍數。
- 倍數的判別法：
 - 2 的倍數：個位數字是 0、2、4、6、8。例如：338
 - 3 的倍數：所有數字和是 3 的倍數。例如：372
 - 4 的倍數：末二位數字是 4 的倍數。例如：12316
 - 5 的倍數：個位數字是 0 或 5。例如：12340
 - 9 的倍數：所有數字和是 9 的倍數。例如：729
 - 11 的倍數：奇數位數字和與偶數位數字和之間的差是 11 的倍數或 0。

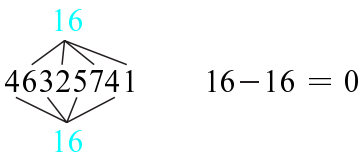
例如： $\begin{array}{c} 21 \\ \swarrow \searrow \\ 5364931 \\ \swarrow \searrow \\ 10 \end{array}$ $21 - 10 = 11$

$\therefore 5364931$ 為 11 的倍數

3. **質數**：一個大於 1 的整數，除了 1 和它自己以外再也沒有其他因數，稱為質數。例如：2、3、5、7、11、13……等。
4. **質因數**：若一個整數的因數是質數，則此因數稱為這個整數的質因數。例如：2、3 均為 12 的質因數。
5. **標準分解式**：所有大於 1 且不為質數的整數均可化成質因數的乘積，這個質因數的乘積就稱為標準分解式。
例如： $126 = 2 \times 3^2 \times 7$
注意：標準分解式中，通常較小的質數寫在前，相同質數以次方形式表示。

▶ 範例 1

請問 46325741 為 2、3、4、5、9、11 的倍數嗎？

- 解：**
- (1) $\because$ 個位數字 = 1
 $\therefore$ 不為 2 或 5 的倍數
 - (2) $\because 4 + 6 + 3 + 2 + 5 + 7 + 4 + 1 = 32$ ，32 不被 3 或 9 整除
 $\therefore$ 不為 3 或 9 的倍數
 - (3) $\because$ 末二位數字 = 41，41 不被 4 整除
 $\therefore$ 不為 4 的倍數
 - (4) $\because$  $16 - 16 = 0$
 $\therefore$ 46325741 為 11 的倍數
 $\therefore$ 46325741 為 11 的倍數，不為 2、3、4、5、9 的倍數

● 學生練習 ●

在 111、1111、55055、101、1001、10001、778、5316 中

- (1) 2 的倍數有哪些？
- (2) 3 的倍數有哪些？
- (3) 4 的倍數有哪些？
- (4) 5 的倍數有哪些？
- (5) 11 的倍數有哪些？

▶ 範例 2

求 1395 的標準分解式。

解：

$$\begin{array}{r|l}
 3 & 1395 \\
 3 & 465 \\
 5 & 155 \\
 & 31
 \end{array}
 \qquad 1395 = 3^2 \times 5 \times 31$$

● 學生練習 ●

求 336 的標準分解式。



最大公因數與最小公倍數

1. 若整數 a 同時為某幾個整數的因數時，則 a 稱為它們的**公因數**。正公因數中最大的那一個稱為**最大公因數**。通常以小括號「 (x, y) 」表示 x 、 y 的最大公因數。
2. 若整數 a 同時為某幾個整數的倍數時，則 a 稱為它們的**公倍數**。正公倍數中最小的那一個稱為**最小公倍數**。通常以中括號「 $[x, y]$ 」表示 x 、 y 的最小公倍數。
3. 若整數 a 和整數 b 的最大公因數為 1，亦即 $(a, b) = 1$ ，則 a 、 b 稱為**互質**。

▶ 範例 3

求值：(1) $(2^4 \times 3^3, 2^2 \times 3^3 \times 7)$

(2) $[2^4 \times 3^3, 2^2 \times 3^3 \times 7]$

(3) $(350, 1155)$

(4) $[350, 1155]$

解：(1) $(2^4 \times 3^3, 2^2 \times 3^3 \times 7) = 2^2 \times 3^3$

(2) $[2^4 \times 3^3, 2^2 \times 3^3 \times 7] = 2^4 \times 3^3 \times 7$

(3) $\because 350 = 2 \times 5^2 \times 7, 1155 = 3 \times 5 \times 7 \times 11$

$\therefore (350, 1155) = 5 \times 7$

(4) $\therefore [350, 1155] = 2 \times 3 \times 5^2 \times 7 \times 11$

● 學生練習 ●

求下列各式的值：

- (1) $(5, 27)$
- (2) $[4, 27]$
- (3) $(45, 105, 126)$
- (4) $[32, 48, 104]$

▶ 範例 4

請問 24、35、47、55 四數中哪一個數與 1974 互質？

解：∵ $1974 = 2 \times 3 \times 7 \times 47$

$$\therefore (24, 1974) = (2^3 \times 3, 2 \times 3 \times 7 \times 47) = 6$$

$$(35, 1974) = (5 \times 7, 2 \times 3 \times 7 \times 47) = 7$$

$$(47, 1974) = (47, 2 \times 3 \times 7 \times 47) = 47$$

$$(55, 1974) = (5 \times 11, 2 \times 3 \times 7 \times 47) = 1$$

∴ 55 與 1974 互質

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 1974} \\ 3 \overline{) 987} \\ 7 \overline{) 329} \\ 47 \end{array}$$

● 學生練習 ●

請問 2、5、7、9 四數中，哪一個數與 6 互質？

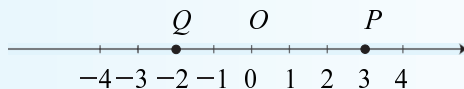
1-3 絕對值



本節重點

在數線上，表示一個數的點與原點的距離，叫做此數的絕對值。以符號「 $| |$ 」來表示。

如圖：



P 點與原點 O 的距離為 3，即 $|3| = 3$ 。

Q 點與原點 O 的距離為 2，即 $|-2| = 2$ 。

注意：因為距離必為正數或 0，所以任何一個實數的絕對值必為正數或 0。

◎說明◎

1. 一個數去掉它的性質符號，就是這個數的絕對值。

例如： $|-3.5| = 3.5$ ， $|7| = 7$ ， $|0| = 0$

2. 若 a 為任意實數，則 $|a| = \begin{cases} a, & \text{當 } a > 0。 \\ 0, & \text{當 } a = 0。 \\ -a, & \text{當 } a < 0。 \end{cases}$

3. 二數相減的絕對值就是大數減去小數的差。

例如： $|8-13| = 13-8 = 5$ ， $|14-6| = 14-6 = 8$

4. $\begin{cases} \text{若 } |x| = \text{正數}, & \text{則 } x \text{ 有二解。例如：} |x| = 5, \text{ 則 } x = 5 \text{ 或 } -5。 \\ \text{若 } |x| = 0, & \text{則 } x = 0。 \\ \text{若 } |x| = \text{負數}, & \text{則 } x \text{ 無解。} (\because \text{任何數的絕對值必為正數或 } 0) \end{cases}$

▶範例 1

分別寫出 $-\frac{1}{3}$ 、 3.9 的絕對值。

解： $|\frac{1}{3}| = \frac{1}{3}$
 $|3.9| = 3.9$

▶範例 2

求下列各值：

(1) $|3-4|$ (2) $|15-9.3|$

解：(1) $|3-4| = 4-3 = 1$
 (2) $|15-9.3| = 15-9.3 = 5.7$

●學生練習●

(1) $|10-27| = 27 - \text{ } = \text{ }$

(2) $|32-14| = \text{ } - \text{ } = \text{ }$

▶範例 3

求下列各 x 值：

(1) $|x-3| = 4$ (2) $|x| = -5$ (3) $|x+2| = 0$

- 解：** (1) $|x-3|=4$
 $\Rightarrow x-3=4$ 或 $x-3=-4$
 $\Rightarrow x=7$ 或 $x=-1$
- (2) $|x|$ 必為正數或 0
 $\therefore |x|=-5 \Rightarrow x$ 無解
- (3) $|x+2|=0$
 $\Rightarrow x+2=0$
 $\Rightarrow x=-2$

● 學生練習 ●

- (1) $|x|=\frac{2}{3}$, 則 $x =$ 或 $x =$
- (2) $|x+2|=3$, 則 $x+2 =$ 或 $x+2 =$
 $\Rightarrow x =$ 或 $x =$

自我評量

- 請說明實數、有理數、整數、自然數的包含關係？
- 下列哪些數是有理數？
 $\sqrt{49}$ 、 $\sqrt{48}$ 、 $\frac{5}{8}$ 、 $0.\bar{9}$ 、 $2.71828\cdots$ 、 -23
- 請寫出 1 到 50 間的所有質數？
- 請問 15348 能被 2、3、4、5、9、11 中哪些數所整除？
- 請寫出 650 的標準分解式。
- (1) $(60, 140) = ?$ (2) $[15, 28] = ?$
- (1) 哪些數的絕對值是 3？ (2) 哪些整數的絕對值小於 3？
- 求下列各值：
 (1) $|5-7|$ (2) $|3+2|-|3-2|$ (3) $\frac{|3-|-5||}{2}$
- 求下列各式的 x 值：
 (1) $|x+1|=6$ (2) $|x+2|=-2$