

第六章 函 數

6-1 函數定義

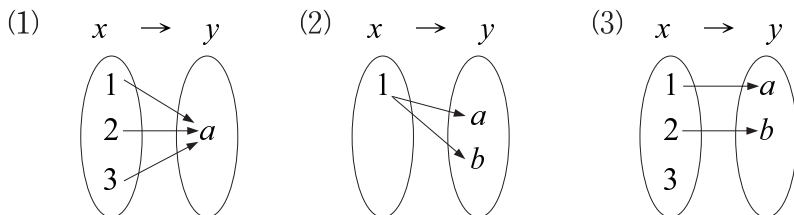


本節重點

函數本身是一種關係，若 y 是 x 的函數，意指對於每一個 x 值，都恰有一個 y 值與它對應。記作 $y = f(x)$ ，其中 x 稱為自變數， y 稱為應變數。

▶ 範例 1

試分辨下列各 x 、 y 關係，何者具有函數關係？



- 解：**
- (1) $\because$ 對於每一個 x 均恰可對應一 y 值
 $\therefore$ 是函數
 - (2) $\because$ 1 對應出 a 、 b 二值
 $\therefore$ 不符合「恰有一 y 值與它對應」
 $\therefore$ 不是函數
 - (3) $\because$ 3 沒有 y 值對應
 $\therefore$ 不符合「每個 x 值均可對應出 y 值」
 $\therefore$ 不是函數

▶ 範例 2

試問下列各關係式中，何者具有 y 是 x 的函數關係？

- (1) $y = \frac{1}{x}$ (2) $y^2 = x$ (3) $y = x^2$ (4) $y = 2x + 1$

- 解：** (1) $y = \frac{1}{x}$ 具有 y 是 x 的函數關係
 (2) 當 $x = 4$ 時， y 可為 2 或 -2
 $\therefore$ 不符合「恰有一 y 值與它對應」
 $\therefore y^2 = x$ 不具有 y 是 x 的函數關係
 (3) $y = x^2$ 具有 y 是 x 的函數關係
 (4) $y = 2x + 1$ 具有 y 是 x 的函數關係



函數值

若 $f(x)$ 表示一個函數，則 $f(a)$ 是函數 $f(x)$ 在 $x = a$ 時的函數值。
 例如：設函數 $f(x) = 3(x-2) - 5$ ，則給定 $x = 2$ 時， $f(2) = 3(2-2) - 5 = -5$ 是唯一的。

▶ 範例 3

設 $f(x) = -4(x+5) - 7$ ，求 $f(-2)$ 、 $f(0)$ 、 $f\left(\frac{5}{2}\right)$ 的值。

解： $f(-2) = -4(-2+5) - 7$
 $= -4 \times 3 - 7$
 $= -12 - 7$
 $= -19$

$$\begin{aligned} f(0) &= -4(0+5) - 7 \\ &= -20 - 7 \\ &= -27 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{5}{2}\right) &= -4\left(\frac{5}{2}+5\right) - 7 \\ &= -4 \times \frac{15}{2} - 7 \\ &= -30 - 7 \\ &= -37 \end{aligned}$$

● 學生練習 ●

- (1) 已知 $f(x) = -3x + 5$ ，則 $f(3) =$ 。
- (2) 已知 $f(x) = 5$ ，則 $f(-2) =$ 。
- (3) 已知 $f(x) = 3x^2 - x - 10$ ，則 $f(-7) =$ 。

▶ 範例 4

設 $f(x+1) = x+3$ ，求 $f(0)$ 、 $f(1)$ 、 $f(5)$ 的值。

$$\begin{aligned}
 \text{解：} \quad f(0) &= f(-1+1) \\
 &= -1+3=2 \\
 f(1) &= f(0+1) \\
 &= 0+3 \\
 &= 3 \\
 f(5) &= f(4+1) \\
 &= 4+3 \\
 &= 7
 \end{aligned}$$

● 學生練習 ●

已知 $f(x) = x + \frac{1}{x}$ ，試求 $-f(2)$ 、 $f\left(\frac{1}{2}\right)$ 、 $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ 。

▶ 範例 5

已知 $f(x) = 2x+5$ ， $g(x) = x^2$ ，試求 $f(f(1))$ 、 $f(g(2))$ 、 $g(f(2))$ 。

$$\begin{aligned}
 \text{解：} \quad f(f(1)) &= f(7) = 19 \\
 f(g(2)) &= f(4) = 13 \\
 g(f(2)) &= g(9) = 81
 \end{aligned}$$

● 學生練習 ●

已知 $f(x+1) = g(x+3)$ 且 $g(x) = x^2$ ，試求 $f(0)$ 、 $f(5)$ 。

6-2 一次函數與二次函數



本節重點

1. 形如 $f(x) = ax + b$
 - (1) 當 $a \neq 0$ 時, $f(x)$ 稱為一次函數。
 - (2) 當 $a = 0$ 時, $f(x) = b$ 稱為常數函數。
2. 形如 $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ 之函數稱為二次函數。

▶ 範例 1

求下列各二次函數的最大值或最小值：

(1) $f(x) = 3x^2 + 2$

(2) $f(x) = -2(x + 1)^2 + 3$

(3) $f(x) = -2x^2 + 4x$

- 解：**
- (1) $f(x) = 3x^2 + 2 \geq 2$
當 $x = 0$ 時, $f(x)$ 有最小值 2
- (2) $f(x) = -2(x + 1)^2 + 3 \leq 3$
當 $x = -1$ 時, $f(x)$ 有最大值 3
- (3) $f(x) = -2x^2 + 4x$
 $= -2(x^2 - 2x)$
 $= -2(x^2 - 2x + 1) + 2$
 $= -2(x - 1)^2 + 2 \leq 2$
當 $x = 1$ 時, $f(x)$ 有最大值 2

● 學生練習 ●

求下列各二次函數的最大值或最小值：

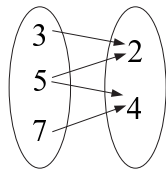
(1) $f(x) = 2(x + 5)^2 + 6$

(2) $f(x) = x^2 + 4x + 5$

自我評量

1. 已知 $f(x+1) = 5$ ，則 $f(0.3) =$ ， $f(f(1)) =$ 。
2. 已知 $f\left(\frac{1}{x+1}\right) = x$ ，則 $f(1) =$ ， $f\left(\frac{1}{3}\right) =$ 。
3. 已知 $f(x) = x^2 + 1$ ， $g(x) = x + 1$ ，則 $f(g(2)) =$ ， $g(f(2)) =$ 。
4. 已知二次函數 $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$ ，則當 $x =$ 時， $f(x)$ 有最小值 。

5. $x \rightarrow y$



圖中 x 、 y 關係是否為函數關係？

6. 已知 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 且 $f(0) = 1$ ， $f(1) = 3$ ， $f(-1) = 7$ ，求 $f(x)$ 。
7. 求 $y = 4x^2 - 2x + 3$ 的最大值或最小值。