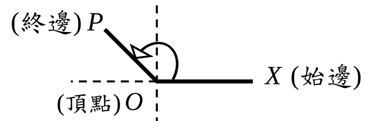
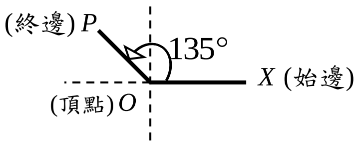
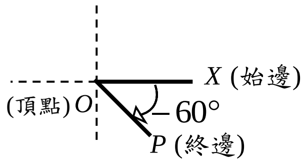
# 有　　向　　角

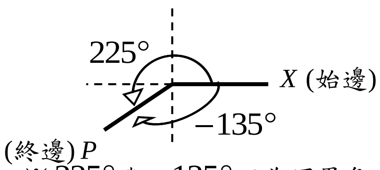



(一)有向角：如左圖，將$\angle XOP$視為由始邊$\overline{OX}$ 逆時針旋轉到$\overline{OP}$所成的角，稱為有向角。

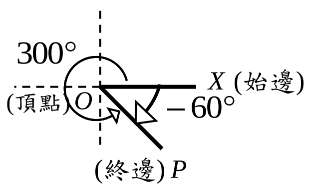
規定 $\boxed{逆}$時針旋轉而得的角為$\boxed{正角}$， $\boxed{順}$時針旋轉而得的角為$\boxed{負角}$。




※ 225°與−135°互為同界角




※ 300°與−60°互為同界角

(二)同界角：兩個有向角有相同的始邊和相同的終邊者，稱此兩有向角互為同界角。

(1)　$\theta$與$\phi$互為同界角 $\Leftrightarrow \theta-\phi=\underset{n圈}{\underline{\underline{n}}}\times 360°$，其中$n$為 $0,\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,\Lambda$

(2)　$\theta$與$\phi$互為同界角 $\Leftrightarrow \theta-\phi=\underset{n圈}{\underline{\underline{n}}}\times 2\pi$，其中$n$為 $0,\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,\Lambda$

※最小正同界角：所有正的同界角中之最小者，稱之。

最大負同界角：所有負的同界角中之最大者，稱之。

同界角：

正同界角
- 1210° =30° +3×360°
- 750° =30° +2×360°
- 390° =30° +1×360°
- 30° (最小正同界角)

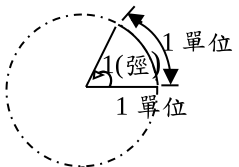
負同界角
- −330° (最大負同界角)
- −690° =30° +(−2)×360°
- −1050° =30° +(−3)×360°
- −1410° =30° +(−4)×360°

(三)角的單位可分為二種：

1. **六十分制**：將一圓的圓周分成 360 等分，每一等分所對的圓心角，稱為 1 "**度**"，記作$1°$；將角一度分成 60 等分，每一等分稱為 1 "**分**"，記作$1'$；將角一分分成 60 等分，每一等分稱為 1 "**秒**"，記作$1''$。

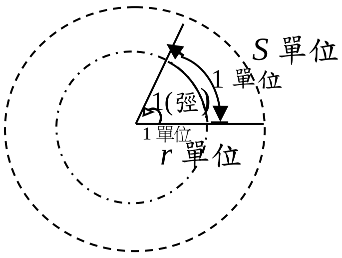
即 $\boxed{1周角=360°}$ 、$\boxed{1°=60'(分)}$且$\boxed{1'(分)=60''(秒)}$ 。

2. **弧度制** (簡稱"**徑**")：左圖一所示，在一圓的圓周上取一圓弧，若弧長 1 單位且半徑 1 單位，則此弧所對的圓心角稱為一"$\boxed{弧度}$"，亦稱為一"$\boxed{徑}$"，單位名稱常省略不寫。




圖一

左圖二所示的同心圓中，若圓心角為 1 弧度(徑)，則弧長$S$=半徑$r$。




圖二

左圖三所示，扇形的弧長$S$與半徑$r$及圓心角$\theta$(徑)的關係為何？

依據上述及同心圓的關係，可得

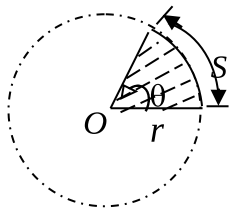
(1)若半徑=1(單位)且圓心角=$\theta$(徑)，則所對弧長$S=1\times\theta$(單位)

(2)若半徑=$r$(單位)且圓心角=$\theta$(徑)，則所對弧長$S=r\times\theta$(單位)

因此，一圓弧的弧長=該圓的半徑×所對的圓心角(徑)，

即 $\boxed{弧長S=r\times\theta，其中\theta的單位為徑}$。

並且，因為一圓周長$=2\pi r$，所以$\boxed{一周角=2\pi(徑)\fallingdotseq 2\times3.14(徑)=6.28(徑)}$ 。




圖三

那麼，扇形的面積$A$與半徑$r$及圓心角$\theta$(徑)的關係又為何？

因為 扇形面積$A$與全圓的面積$\pi r^2$的比 等於 該扇形所對圓心角$\theta$(徑)與周角$2\pi$(徑)的比，

所以 $\dfrac{扇形面積}{全圓面積}=\dfrac{A}{\pi r^2}=\dfrac{\theta}{2\pi}\Rightarrow A=\dfrac{\theta}{2\pi}\times\pi r^2$，得 $\boxed{扇形面積A=\dfrac{1}{2}\theta\, r^2，其中\theta的單位為徑}$ 。

另外，$\Theta\ A=\dfrac{1}{2}\theta\, r^2=\dfrac{1}{2}\theta\times r\times r=\dfrac{1}{2}S\times r$

$$\boxed{\therefore A=\frac{1}{2}S\times r}$$

(四) 角的單位換算： (**按比例計算即可**)

(1) 特別角：$\boxed{一周角=2\pi=360°}$、$\boxed{\pi=180°}$，如右圖。

(2)　$1°=$？

解：$\Theta\ \pi(徑)=180°$　　$\therefore \pi\times1(徑)=180\times1°$

$\therefore 1°=\dfrac{\pi}{180}(徑)\fallingdotseq \underline{0.0174(徑)}$

(3) 角 1＝？

$\Theta\ \pi(徑)=180°$　　$\therefore \pi\times1(徑)=180\times1°$

$\therefore 1(徑)=\dfrac{180}{\pi}\times1°\fallingdotseq \underline{57.2\Lambda\ °}$

特別角：[正(逆)旋轉角]