

第三章 指數與方根

3-1 指數



本節重點

1. 設 a 為任意實數， n 為正整數，則 $\underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ 個 } a \text{ 相乘}} = a^n$ ，此時， a 稱為底數， n 稱為指數。
2. (1) $a^m \times a^n = \underbrace{(a \times a \times \cdots \times a)}_{m \text{ 個 } a \text{ 相乘}} \times \underbrace{(a \times a \times \cdots \times a)}_{n \text{ 個 } a \text{ 相乘}} = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{(m+n) \text{ 個 } a \text{ 相乘}} = a^{m+n}$
 (2) $(a^m)^n = a^{mn}$
 (3) 若 $m > n$ 時， $\frac{a^m}{a^n} = \frac{\underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{m \text{ 個 } a \text{ 相乘}}}{\underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ 個 } a \text{ 相乘}}} = a^{m-n}$
 (4) $(ab)^n = \underbrace{ab \times ab \times \cdots \times ab}_{n \text{ 個 } ab \text{ 相乘}} = \underbrace{(a \times a \times \cdots \times a)}_{n \text{ 個 } a \text{ 相乘}} \times \underbrace{(b \times b \times \cdots \times b)}_{n \text{ 個 } b \text{ 相乘}} = a^n b^n$
 (5) 已知 a 為不是 0 的任何數，則 $a^0 = 1$ 。

▶ 範例 1

$$(1) \quad 2^3 \times 2^4 \times 2^5 = 2^{\square} \quad (2) \quad (5^7)^6 = 5^{\square} \quad (3) \quad 24^2 = 2^{\square} \times 3^{\square} \quad (4) \quad \frac{5^7}{5^6} = 5^{\square}$$

解：

$$(1) \quad 2^3 \times 2^4 \times 2^5 = 2^{3+4+5} = 2^{12}$$

$$(2) \quad (5^7)^6 = 5^{7 \times 6} = 5^{42}$$

$$(3) \quad 24^2 = (2^3 \times 3)^2 = 2^6 \times 3^2$$

$$(4) \quad \frac{5^7}{5^6} = 5^{7-6} = 5^1$$

● 學生練習 ●

(1) $8^6 = 2^{\square}$ (2) $6^3 \times 6^4 = 2^{\square} \times 3^{\square}$

3-2 平方根與立方根



本節重點

- 當 $b^2 = a$ 時，稱 b 為 a 的平方根。
例如： $(-2)^2 = 4$ ， $2^2 = 4$
 $\therefore -2$ 與 2 均為 4 的平方根
注意：一個正數 a 的平方根有二個，一為正平方根，以 $\sqrt{a}$ 表示；另一為負平方根，以 $-\sqrt{a}$ 表示。
- 當 $b^3 = a$ 時，稱 b 為 a 的立方根，以 $\sqrt[3]{a}$ 表示。
例如： $2^3 = 8$ $\therefore 2$ 為 8 的立方根
 $(-2)^3 = -8$ $\therefore -2$ 為 -8 的立方根
注意：任何數的立方根只有一個，且正數的立方根為正數，負數的立方根為負數。
- $\sqrt{0} = 0$ ， $\sqrt[3]{0} = 0$
- 數線上找不到負數的平方根，例如： $\sqrt{-6}$ 不在數線上（即 $\sqrt{-6}$ 不為實數）。

▶ 範例 1

求下列各數的平方根：

(1) 81 (2) 0.25

解：(1) 81 的平方根為 $\pm\sqrt{81} = \pm\sqrt{9^2} = \pm 9$
(2) 0.25 的平方根為 $\pm\sqrt{0.25} = \pm\sqrt{(0.5)^2} = \pm 0.5$

● 學生練習 ●

求下列各數的平方根：

(1) 169 (2) $6\frac{1}{4}$ (3) 0

▶ 範例 2

求下列各數的立方根：

- (1) 27
- (2) 0.008
- (3) $-\frac{8}{125}$

解： (1) 27 的立方根為 $\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$
 (2) 0.008 的立方根為 $\sqrt[3]{0.008} = \sqrt[3]{(0.2)^3} = 0.2$
 (3) $-\frac{8}{125}$ 的立方根為 $\sqrt[3]{-\frac{8}{125}} = \sqrt[3]{\left(-\frac{2}{5}\right)^3} = -\frac{2}{5}$

● 學生練習 ●

求下列各數的立方根：

- (1) -64
- (2) 0.216
- (3) $-15\frac{5}{8}$

3-3 方根的運算



同次方根與同類方根

1. **同次方根**：二個以上的方根經化簡後，開方次數相同者稱為**同次方根**。

例如： $\sqrt{2}$ 、 $\sqrt{5}$ 為同次方根。

$\sqrt[3]{5}$ 、 $\sqrt[3]{7}$ 、 $\sqrt[3]{-9}$ 為同次方根。

注意：同次方根可比較大小和做方根的乘、除運算。

2. **同類方根**：二個以上的方根經化簡後，開方次數相同且被開方數也相同者稱為**同類方根**。

例如： $\sqrt{3}$ 、 $-2\sqrt{3}$ 、 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 為同類方根。

注意：同類方根可做加、減、乘、除的運算。

▶ 範例 1

下列哪些是同次方根？哪些是同類方根？

$$\sqrt{2}、\sqrt[3]{3}、\sqrt{3}、5\sqrt{2}、\sqrt[3]{4}、2\sqrt{5}、-2\sqrt{2}、6\sqrt[3]{4}$$

解： (1) $\sqrt{2}、\sqrt{3}、5\sqrt{2}、2\sqrt{5}、-2\sqrt{2}$ 為同次方根

(2) $\sqrt[3]{3}、\sqrt[3]{4}、6\sqrt[3]{4}$ 為同次方根

(3) $\sqrt{2}、5\sqrt{2}、-2\sqrt{2}$ 為同類方根

(4) $\sqrt[3]{4}、6\sqrt[3]{4}$ 為同類方根

● 學生練習 ●

下列哪些是同次方根？哪些是同類方根？

$$4\sqrt{7}、-2\sqrt{3}、\sqrt[3]{2}、-5\sqrt[3]{3}、2\sqrt{7}、8\sqrt[3]{3}、\sqrt{10}、-\sqrt{7}$$



方根的加、減運算

方根作加、減運算時，只須把同類方根合併即可。

例如： $a\sqrt{k} + b\sqrt{k} - c\sqrt{k} = (a + b - c)\sqrt{k}$

▶ 範例 2

求下列各式的值：

$$(1) 2\sqrt{3} - 5\sqrt{3} - 7\sqrt{3} \quad (2) 2\sqrt[3]{4} + 5\sqrt[3]{4} \quad (3) 4\sqrt{5} - 6\sqrt{3} + 7\sqrt{3} - 9\sqrt{5}$$

解： (1) $2\sqrt{3} - 5\sqrt{3} - 7\sqrt{3} = (2 - 5 - 7)\sqrt{3} = -10\sqrt{3}$

(2) $2\sqrt[3]{4} + 5\sqrt[3]{4} = (2 + 5)\sqrt[3]{4} = 7\sqrt[3]{4}$

(3) $4\sqrt{5} - 6\sqrt{3} + 7\sqrt{3} - 9\sqrt{5} = (4 - 9)\sqrt{5} + (-6 + 7)\sqrt{3} = -5\sqrt{5} + \sqrt{3}$

● 學生練習 ●

求下列各式的值：

$$(1) 8\sqrt[3]{3} - 5\sqrt[3]{3} + 12\sqrt[3]{3}$$

$$(2) -\sqrt{3} + 3\sqrt{2} + 5\sqrt{3} - 6\sqrt{2}$$

$$(3) 3\sqrt{5} + 5\sqrt{7} + 7\sqrt{5} - 3\sqrt{7}$$



方根的乘、除運算

1. 若 $a \geq 0, b \geq 0$ ，則 $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$
2. a, b 為任意實數，則 $\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{ab}$
3. 若 $a \geq 0, b > 0$ ，則 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$
4. a, b 為任意實數且 $b \neq 0$ ，則 $\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$

▶ 範例 3

求下列各式的結果：

$$(1) \sqrt{2} \times \sqrt{3} \quad (2) \sqrt[3]{6} \times \sqrt[3]{10} \quad (3) \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{5}} \quad (4) \frac{\sqrt[3]{-320}}{\sqrt[3]{40}}$$

解： (1) $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{2 \times 3} = \sqrt{6}$

(2) $\sqrt[3]{6} \times \sqrt[3]{10} = \sqrt[3]{6 \times 10} = \sqrt[3]{60}$

(3) $\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{45}{5}} = \sqrt{9} = 3$

(4) $\frac{\sqrt[3]{-320}}{\sqrt[3]{40}} = \sqrt[3]{\frac{-320}{40}} = \sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{(-2)^3} = -2$

● 學生練習 ●

求下列各式的結果：

$$(1) \sqrt{3} \times \sqrt{7} \quad (2) \sqrt[3]{-4} \times \sqrt[3]{-3} \quad (3) \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}} \quad (4) \frac{\sqrt[3]{108}}{\sqrt[3]{-4}}$$



最簡化運算

1. 設 a, b 均為正數，則

$$\sqrt{a^2 b} = \sqrt{a^2} \times \sqrt{b} = a\sqrt{b}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{\frac{a \times b}{b \times b}} = \sqrt{\frac{ab}{b^2}} = \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{b^2}} = \frac{\sqrt{ab}}{b}$$

2. 設 a 、 b 為實數且 $b \neq 0$ ，則

$$\sqrt[3]{a^3 b} = \sqrt[3]{a^3} \times \sqrt[3]{b} = a\sqrt[3]{b}$$

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \sqrt[3]{\frac{a \times b^2}{b \times b^2}} = \sqrt[3]{\frac{ab^2}{b^3}} = \frac{\sqrt[3]{ab^2}}{\sqrt[3]{b^3}} = \frac{\sqrt[3]{ab^2}}{b}$$

▶ 範例 4

$\sqrt{3}$ 與 $\sqrt{12}$ 是否為同類方根？

解： $\because \sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$
 $\therefore \sqrt{3}$ 與 $\sqrt{12}$ 為同類方根

● 學生練習 ●

$\sqrt{2}$ 與 $\sqrt{8}$ 是否為同類方根？

▶ 範例 5

化簡下列各式：

(1) $\sqrt[3]{250}$ (2) $\sqrt{162}$ (3) $\sqrt[3]{-32}$

(4) $\sqrt{\frac{2}{3}}$ (5) $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ (6) $\sqrt[3]{2744}$

解： (1) $\sqrt[3]{250} = \sqrt[3]{125 \times 2} = 5\sqrt[3]{2}$
 (2) $\sqrt{162} = \sqrt{81 \times 2} = \sqrt{9^2 \times 2} = 9\sqrt{2}$
 (3) $\sqrt[3]{-32} = \sqrt[3]{(-2)^3 \times 4} = -2\sqrt[3]{4}$
 (4) $\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{2 \times 3}{3 \times 3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$
 (5) $\sqrt[3]{\frac{1}{2}} = \sqrt[3]{\frac{2^2}{2 \times 2^2}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}$
 (6) $\sqrt[3]{2744} = \sqrt[3]{2^3 \times 7^3} = 2 \times 7 = 14$

● 學生練習 ●

化簡下列各式：

(1) $\sqrt{18}$ (2) $\sqrt[3]{-72}$ (3) $\sqrt{\frac{2}{7}}$ (4) $\sqrt[3]{\frac{2}{9}}$

▶ 範例 6

求下列各式的值：

$$(1) \quad 5\sqrt{2} - \sqrt{8} + 7\sqrt{2} - \sqrt{18} \quad (2) \quad \sqrt{27} - \sqrt{108} + 3\sqrt{75} - 4\sqrt{3}$$

解： (1) $5\sqrt{2} - \sqrt{8} + 7\sqrt{2} - \sqrt{18}$
 $= 5\sqrt{2} - 2\sqrt{2} + 7\sqrt{2} - 3\sqrt{2}$
 $= (5 - 2 + 7 - 3) \sqrt{2}$
 $= 7\sqrt{2}$

(2) $\sqrt{27} - \sqrt{108} + 3\sqrt{75} - 4\sqrt{3}$
 $= \sqrt{3^2 \times 3} - \sqrt{6^2 \times 3} + 3\sqrt{5^2 \times 3} - 4\sqrt{3}$
 $= 3\sqrt{3} - 6\sqrt{3} + 15\sqrt{3} - 4\sqrt{3}$
 $= (3 - 6 + 15 - 4) \sqrt{3}$
 $= 8\sqrt{3}$

● 學生練習 ●

求下列各式的值：

$$(1) \quad 9\sqrt{3} + 7\sqrt{12} - 5\sqrt{48} \quad (2) \quad 5\sqrt[3]{54} + 8\sqrt[3]{250} - \sqrt[3]{686}$$

▶ 範例 7

求下列各式的乘積，並化成最簡根式：

$$(1) \quad \sqrt{6} (\sqrt{3} - \sqrt{2})$$

$$(2) \quad (2 + 3\sqrt{2}) (3 - 2\sqrt{2})$$

$$(3) \quad (\sqrt[3]{3} - 1) (\sqrt[3]{9} - 1)$$

解： (1) $\sqrt{6} (\sqrt{3} - \sqrt{2}) = \sqrt{6} \times \sqrt{3} - \sqrt{6} \times \sqrt{2}$
 $= \sqrt{18} - \sqrt{12}$
 $= 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$

(2) $(2 + 3\sqrt{2}) (3 - 2\sqrt{2}) = 2 \times 3 - 2 \times 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} \times 3 - 3\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}$
 $= 6 - 4\sqrt{2} + 9\sqrt{2} - 12$
 $= -6 + 5\sqrt{2}$

(3) $(\sqrt[3]{3} - 1) (\sqrt[3]{9} - 1) = \sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{3} \times 1 - \sqrt[3]{9} + 1$
 $= \sqrt[3]{27} - \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{9} + 1$
 $= 3 - \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{9} + 1$
 $= 4 - \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{9}$

● 學生練習 ●

求下列各式的乘積，並化成最簡根式：

- (1) $\sqrt{6}(-2 + \sqrt{5})$
- (2) $\sqrt{10}(\sqrt{5} + \sqrt{2})$
- (3) $(2 + 3\sqrt{5})(3 - 2\sqrt{5})$
- (4) $(2\sqrt{3} + 5\sqrt{6})(2\sqrt{6} - \sqrt{3})$
- (5) $(\sqrt[3]{5} - 1)(2\sqrt[3]{5} + 1)$



有理化分母

1. 利用方根的運算，把分母帶有根號者化成分母不帶根號的有理數，這過程稱為**有理化分母**。

例如：
$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

2. 有理化分母常用公式： $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
 $(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3$

▶ 範例 8

化簡下列各式：

- (1) $\frac{1}{\sqrt{3}}$
- (2) $\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$
- (3) $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$
- (4) $\frac{1}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{3}}$

解：

- (1)
$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$
- (2)
$$\sqrt[3]{\frac{1}{4}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2^2}} = \sqrt[3]{\frac{1 \times 2}{2^2 \times 2}} = \sqrt[3]{\frac{2}{2^3}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{2}$$
- (3)
$$\frac{1}{\sqrt{2}+1} = \frac{1 \times (\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1) \times (\sqrt{2}-1)} = \frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2})^2 - 1^2} = \frac{\sqrt{2}-1}{2-1} = \sqrt{2}-1$$
- (4)
$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{3}} &= \frac{1 \times (\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{15} + \sqrt[3]{9})}{(\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{3}) \times (\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{15} + \sqrt[3]{9})} \\ &= \frac{\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{15} + \sqrt[3]{9}}{(\sqrt[3]{5})^3 - (\sqrt[3]{3})^3} = \frac{\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{15} + \sqrt[3]{9}}{2} \end{aligned}$$

● 學生練習 ●

化簡下列各式：

- (1) $\frac{1}{\sqrt{5}}$
- (2) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$
- (3) $\frac{2}{\sqrt{5}+1}$
- (4) $\frac{1}{3-\sqrt{2}}$
- (5) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}+1}$

▶ 範例 9

(1) $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$ (2) $\sqrt{2 + \sqrt{3}}$

解： (1) $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 2\sqrt{3} + 1^2} = \sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2} = \sqrt{3} + 1$

(2) $\sqrt{2 + \sqrt{3}} = \sqrt{\frac{4 + 2\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$

● 學生練習 ●

化簡 $\sqrt{9 - 6\sqrt{2}}$ 。

自我評量

1. $\sqrt{8}$ 、 $\sqrt{28}$ 、 $\sqrt{36}$ 、 $\sqrt{72}$ 哪一個是 $\sqrt{2}$ 的同類方根？
2. 求 $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ 的倒數。
3. 求 $(3\sqrt{2} + 5\sqrt{6})(2\sqrt{3} - 7)$ 的積。
4. 求 $\sqrt{8} + \sqrt{16} + \sqrt{32} + \sqrt{64}$ 的值。
5. 求 $5\sqrt{\frac{6}{5}} - 6\sqrt{\frac{10}{3}}$ 的值。
6. 求 $(\sqrt{6} - \sqrt{2})(\sqrt{6} + \sqrt{2}) - 4\sqrt{3}(\sqrt{3} - 2)$ 的值。
7. 求 $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{18}} \div \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{16}}$ 的值。
8. 求 $\sqrt{38\frac{1}{36}}$ 的值。
9. 計算 $\sqrt{2} \div \sqrt{8}$ 。
10. 計算 $(\sqrt{5} + \sqrt{3})^2 + 2(\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{3}) + (\sqrt{5} - \sqrt{3})^2$ 的值。