

第五章 方程式與不等式

5-1 一元一次方程式與不等式



本節重點

1. 一元一次方程式：

設 a 、 b 為實數，且 $a \neq 0$ ，則 $ax + b = 0$ 稱為一元一次方程式。例如：
 $x + 2 = 3$ ， $2x - 1 = 0$

2. 移項法則：

依據等量公理，將一個數從等號的一邊移到等號的另一邊應遵守下列移項法則。

(1) 「+」 $\xrightarrow{\text{變}}$ 「-」

例如： $x + 2 = 5 \Rightarrow x = 5 - 2$ （即等號二邊同減 2）

(2) 「-」 $\xrightarrow{\text{變}}$ 「+」

例如： $x - 5 = 3 \Rightarrow x = 3 + 5$ （即等號二邊同加 5）

(3) 「 $\times$ 」 $\xrightarrow{\text{變}}$ 「 $\div$ 」

例如： $x \times 3 = 18 \Rightarrow x = 18 \div 3$ （即等號二邊同除 3）

或

$$3x = 18 \Rightarrow x = \frac{18}{3}$$

(4) 「 $\div$ 」 $\xrightarrow{\text{變}}$ 「 $\times$ 」

例如： $x \div 3 = 2 \Rightarrow x = 2 \times 3$ （即等號二邊同乘 3）

或

$$\frac{x}{3} = 2 \Rightarrow x = 2 \times 3$$

▶ 範例 1

解方程式：

(1) $x + 3 = 6$ (2) $\frac{x}{2} = 6$ (3) $3(-2x - 5) + 2x = 9$

(4) $x - \frac{5-x}{2} = 8$

解： (1) $x + 3 = 6$

$$x = 6 - 3$$

$$x = 3$$

(2) $\frac{x}{2} = 6$

$$x = 6 \times 2$$

$$x = 12$$

(3) $3(-2x - 5) + 2x = 9$

$$-6x - 15 + 2x = 9$$

$$-6x + 2x = 9 + 15$$

$$-4x = 24$$

$$x = \frac{24}{-4}$$

$$x = -6$$

(4) $x - \frac{5-x}{2} = 8$

$$2x - (5 - x) = 16$$

$$2x - 5 + x = 16$$

$$2x + x = 16 + 5$$

$$3x = 21$$

$$x = 7$$

● 學生練習 ●

解下列各方程式：

(1) $x - 3 = 7$ (2) $2(3 - x) = -4(x + 5)$ (3) $x + \frac{x-1}{3} = 15$



方程式 $ax + b = 0$ 求解

已知一元一次方程式 $ax + b = 0$ ，則

1. 若 $a \neq 0$ 時， $x = -\frac{b}{a}$ (方程式恰有一解)

例如： $2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$

2. 若 $a = 0$ ， $b = 0$ 時，例如： $0 \times x = 0$
因為 x 可為任何數，所以方程式有無限多解。

3. 若 $a = 0$ ， $b \neq 0$ 時，例如： $0 \times x = 2$
因為沒有任何數滿足 $0 \times x = 2$ ，所以方程式無解。

▶ 範例 2

解方程式 $2x - [3(x + 1) - (x + 4)] = 1$ 。

解： $2x - [3(x + 1) - (x + 4)] = 1$

$$2x - (3x + 3 - x - 4) = 1$$

$$2x - (3x - x + 3 - 4) = 1$$

$$2x - (2x - 1) = 1$$

$$2x - 2x + 1 = 1$$

$$2x - 2x = 1 - 1$$

$$0 \times x = 0$$

$\therefore x$ 為任意數

● 學生練習 ●

解方程式 $x - 5 = x + 6$ 。



一元一次不等式

1. 在一元一次方程式中，將「 $=$ 」改為「 $>$ 」或「 $\geq$ 」或「 $<$ 」或「 $\leq$ 」者，稱為一元一次不等式。
2. 不等式運算法則：
 - (1) 不等式的二邊同時加或減同一數，結果大的一邊仍大於另一邊。
 - (2) 不等式二邊同時乘或除同一數 k 則：
 - ①若 k 為正數，則大的一邊仍大於另一邊。
 - ②若 k 為負數，則大的一邊會小於另一邊。

▶ 範例 3

解下列不等式，並在數線上圖示其解：

(1) $x + 2 > 8$

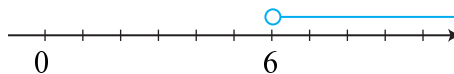
(2) $5x < 12$

(3) $-3x > 9$

(4) $3x - 6 \leq 4x + 1$

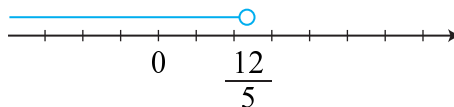
解：(1) $x + 2 - 2 > 8 - 2$

$$x > 6$$



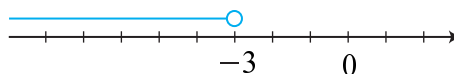
$$(2) \quad 5x \times \frac{1}{5} < 12 \times \frac{1}{5}$$

$$x < \frac{12}{5}$$



$$(3) \quad -3x \times \frac{1}{(-3)} < 9 \times \left(\frac{1}{-3}\right)$$

$$x < -3$$



$$(4) \quad 3x - 6 - 3x - 1 \leq 4x + 1 - 3x - 1$$

$$-7 \leq x$$

$$x \geq -7$$



● 學生練習 ●

解不等式：(1) $3x + 2 \leq -14$ (2) $5 - 3x < -5$

▶ 範例 4

解不等式 $1 \leq \frac{3x-1}{2} < 4$ 。

解： $1 \leq \frac{3x-1}{2} < 4$

即 $\frac{3x-1}{2} \geq 1$ 且 $\frac{3x-1}{2} < 4$

$$(1) \quad \frac{3x-1}{2} \geq 1$$

$$3x-1 \geq 2$$

$$x \geq 1$$

$$(2) \quad \frac{3x-1}{2} < 4$$

$$3x-1 < 8$$

$$x < 3$$

故由(1)、(2)知 $1 \leq x < 3$

● 學生練習 ●

解不等式 $x \geq 3x - 4 > -2x + 1$ 。

5-2 一元二次方程式



本節重點

1. 形如 $ax^2 + bx + c = 0$ ，其中 $a \neq 0$ 稱為一元二次方程式，即只含有一種未知數，且未知數的最高次數為 2 的方程式。
例如：(1) $x^2 + 2x + 1 = 0$
(2) $(x-3)(x+5) = 0$
2. 若 A 與 B 代表二個數，且 $AB = 0$ ，則 $A = 0$ 或 $B = 0$ 。
我們可以利用此觀念來解決一元二次方程式求根的問題。
例如： $(x+1)(x-1) = 0$
則 $x+1 = 0$ 或 $x-1 = 0$
 $x = -1$ 或 $x = 1$
 $\therefore$ 方程式有 ± 1 二個根
3. 解一元二次方程式的方法有很多，以下列舉幾項：
 - (1) 提出公因式。
 - (2) 利用完全平方公式，即 $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$ 。
 - (3) 利用平方差公式，即 $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ 。
 - (4) 十字交乘法（最常用的方法）。
 - (5) 配方法（常用在「十字交乘法」不易或無法求解的一元二次方程式）。
 - (6) 公式解，設 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)，且 $b^2 - 4ac \geq 0$ ，則
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}。$$

▶ 範例 1

利用不同方法解下列各方程式：

- (1) $2x + x^2 = 0$ (3) $4x^2 - 9 = 0$
(2) $x^2 + 8x + 16 = 0$ (4) $(x+1)^2 = 16$

解： (1) 利用提出公因式法

$$2x + x^2 = 0$$

$$x(2+x) = 0$$

$$x = 0 \text{ 或 } 2+x=0 \Rightarrow x = 0 \text{ 或 } x = -2$$

$$(2) \quad x^2 + 8x + 16 = 0$$

可看成 $x^2 + 2 \times 4 \times x + 4^2 = 0$

$\therefore$ 利用完全平方公式 $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$

得 $(x + 4)^2 = 0 \Rightarrow x + 4 = 0$

$$x = -4$$

$$(3) \quad 4x^2 - 9 = 0 \Rightarrow (2x)^2 - 3^2 = 0$$

利用平方差公式 $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

得 $(2x + 3)(2x - 3) = 0$

$2x + 3 = 0$ 或 $2x - 3 = 0$

$$x = -\frac{3}{2} \text{ 或 } x = \frac{3}{2}$$

$$(4) \quad \text{利用平方根觀念}$$

$$(x + 1)^2 = 16$$

得 $x + 1 = \pm 4$

$x + 1 = 4$ 或 $x + 1 = -4$

$\therefore x = 3$ 或 -5

● 學生練習 ●

解下列各方程式：

$$(1) \quad 2x^2 - x = 0$$

$$(2) \quad x^2 - 16x + 64 = 0$$

$$(3) \quad 36 - 25x^2 = 0$$

$$(4) \quad (x - 3)^2 = 25$$

▶ 範例 2

利用十字交乘法解方程式 $x^2 + 3x + 2 = 0$ 。

解： $x^2 + 3x + 2 = 0$

$$\begin{array}{r} 1 \quad 2 \\ \times \\ 1 \quad 1 \\ \hline 1 + 2 = 3 \end{array}$$

$$\therefore \text{原式} \Rightarrow (x + 2)(x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow x + 2 = 0 \text{ 或 } x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow x = -2 \text{ 或 } x = -1$$

● 學生練習 ●

利用十字交乘法解方程式 $15x^2 + 14x - 16 = 0$ 。

▶ 範例 3

利用配方法解方程式 $2x^2 + 3x - 1 = 0$ 。

解： $2x^2 + 3x - 1 = 0$

$$x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} = 0 \quad (\text{先將平方項係數變成 } 1)$$

$$x^2 + \frac{3}{2}x = \frac{1}{2} \quad (\text{常數移至另一邊})$$

$$x^2 + 2 \times \frac{3}{4}x + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{1}{2} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 \quad (\text{配成完全平方})$$

$$\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{17}{16}$$

$$x + \frac{3}{4} = \pm \sqrt{\frac{17}{16}}$$

$$x + \frac{3}{4} = \pm \frac{\sqrt{17}}{4}$$

$$x = -\frac{3}{4} \pm \frac{\sqrt{17}}{4}$$

● 學生練習 ●

利用配方法解方程式 $x^2 + 10x - 30 = 0$ 。

▶ 範例 4

利用公式解方程式 $3x^2 + 4x - 1 = 0$ 。

解： $3x^2 + 4x - 1 = 0$

$$\text{即 } a = 3, b = 4, c = -1$$

$$\text{則 } b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \times 3 \times (-1) = 16 + 12 = 28 > 0$$

$$\therefore x = \frac{-4 \pm \sqrt{28}}{2 \times 3} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{7}}{6} = \frac{-2 \pm \sqrt{7}}{3}$$

$$\text{即 } x = \frac{-2 \pm \sqrt{7}}{3}$$

● 學生練習 ●

利用公式解方程式 $x^2 - 4x - 32 = 0$ 。



判別式與根

一元二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 中， $b^2 - 4ac$ 稱為判別式，以 D 來表示。

1. 若 $D > 0$ ，即 $b^2 - 4ac > 0$
則方程式有二相異實數根，分別為
 $x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$ 或 $x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$
2. 若 $D = 0$ ，即 $b^2 - 4ac = 0$
則方程式有一實數根，為 $x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-b}{2a}$
3. 若 $D < 0$ ，即 $b^2 - 4ac < 0$ ；因為 $D < 0$ 時， $\sqrt{D}$ 並非實數，所以方程式沒有實數根。

▶ 範例 5

試判別下列各方程式有無實數解：

(1) $9x^2 - 6x + 1 = 0$ (2) $x^2 + x + 1 = 0$ (3) $x^2 + x - 1 = 0$

解：(1) $9x^2 - 6x + 1 = 0$

$$D = (-6)^2 - 4 \times 9 \times 1 = 36 - 36 = 0$$

∴ 方程式有一實數解

(2) $x^2 + x + 1 = 0$

$$D = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$$

∴ 方程式沒有實數解

(3) $x^2 + x - 1 = 0$

$$D = 1^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 1 + 4 = 5 > 0$$

∴ 方程式有二個相異實數解

● 學生練習 ●

試判別下列各方程式有無實數解：

(1) $x^2 - x - 1 = 0$ (2) $x^2 + 4x + 4 = 0$ (3) $3x^2 - 4x + 3 = 0$

 根與係數關係

已知 α 、 β 為一元二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ 之二根

則 $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ (二根和)

$\alpha\beta = \frac{c}{a}$ (二根積)

說明： $\because$ 二根為 α 、 β 之方程式為 $a(x - \alpha)(x - \beta) = 0$

即 $a[x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta] = 0$

與 $ax^2 + bx + c = 0$ 比較得

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

▶ 範例 6

已知 α 、 β 為 $x^2 - 3x + 1 = 0$ 之二根，求下列各值：

- (1) $\alpha + \beta$ (2) $\alpha\beta$ (3) $\alpha^2 + \beta^2$ (4) $\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta}$

解：(1) $\alpha + \beta = 3$

(2) $\alpha\beta = 1$

(3) $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) - 2\alpha\beta = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 3^2 - 2 \times 1 = 7$

(4) $\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta^2 + \alpha^2}{\alpha\beta} = \frac{7}{1} = 7$

● 學生練習 ●

已知 α 、 β 為 $x^2 + 5x - 3 = 0$ 之二根，求下列各值：

- (1) $\alpha + \beta$ (2) $\alpha\beta$ (3) $\alpha^2 + \beta^2$ (4) $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$

5-3 二元一次聯立方程式

 本節重點

1. 二元一次方程式：含有二個未知數（二元），未知數的最高次數為一次的等式。例如： $x + y = 5$

2. 二個二元一次方程式並列在一起，稱為二元一次聯立方程式。

例如：
$$\begin{cases} 3x - 2y = 9 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$$

3. 解二元一次聯立方程式的方法有二：

- (1) 代入消去法。
(2) 加減消去法。

▶ 範例 1

解下列各二元一次聯立方程式：

(1)
$$\begin{cases} y = 2x \\ 8x + 5y = 180 \end{cases} \quad (2) \quad \begin{cases} 4x + 2y = -2 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$$

解：(1)
$$\begin{cases} y = 2x \cdots \cdots \textcircled{1} \\ 8x + 5y = 180 \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

將①式代入②式

$$8x + 5 \times (2x) = 180$$

$$8x + 10x = 180$$

$$18x = 180 \text{ 得 } x = 10$$

將 $x = 10$ 代入①式得 $y = 20$

$$\therefore \begin{cases} x = 10 \\ y = 20 \end{cases} \text{ 為方程組的解}$$

(2)
$$\begin{cases} 4x + 2y = -2 \cdots \cdots \textcircled{1} \\ 2x - 3y = 1 \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

將② $\times 2$ 得 $4x - 6y = 2 \cdots \cdots \textcircled{3}$

① $-\textcircled{3}$ 得 $8y = -4$

$$y = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2} \text{ 代入①得 } x = -\frac{1}{4}$$

$$\therefore \begin{cases} x = -\frac{1}{4} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases} \text{ 為原聯立方程式的解}$$

● 學生練習 ●

解下列各二元一次聯立方程式：

(1)
$$\begin{cases} y = 2x + 2 \\ x - 3y = 6 \end{cases} \quad (2) \quad \begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 7 \end{cases}$$

自我評量

1. 解下列各方程式：

(1) $2x - \frac{15-2x}{3} = 5$

(2) $\frac{x}{3} - \frac{2x-1}{2} = -\frac{1}{6}$

(3) $(4x + 7) - x = (3x + 4) - 3$

(4) $2x - 3 [x - (1 + x)] = 13$

2. 解下列各方程式：

(1) $5x^2 = 0$

(2) $(x-8)(x+4) = -4(x+2)$

(3) $2x^2 - 5x + 6 = 0$

(4) $20x^2 - 71x + 63 = 0$

3. 解下列各聯立方程式：

(1)
$$\begin{cases} 3x - 2y = 7 \\ 4x + 3y = -2 \end{cases}$$

(2)
$$\begin{cases} 4(x-y) - 5x = -13 \\ -3x + 5(x+y) = 11 \end{cases}$$

(3)
$$\begin{cases} x - y = -1 \\ x = \frac{2}{3}y \end{cases}$$