

初等三角函數複習題

一、銳角三角函數

例1. 【已知一角 θ 的某一三角值，求其他五個三角值】

設 $0^\circ < \theta < 90^\circ$ 且 $\tan \theta = \frac{5}{12}$ ，則角 θ 的另外五個三角值為何？

二、任意角的三角函數

例1. 【特別角的三角值】 (1) $\sin 120^\circ$ (2) $\cos 210^\circ$ (3) $\tan 150^\circ$ (4) $\cot 330^\circ$

(5) $\sec(-135^\circ)$ (6) $\csc(240^\circ)$ (7) $\sin(-450^\circ)$ (8) $\cos(180^\circ)$

例2. 【三角值的正負性質】

(1) 已知 $\sin \theta > 0$ 且 $\cos \theta < 0$ ，則角 θ 為第幾象限？ (2) 設 $(\tan \theta, \sec \theta)$ 在第三象限內，則 θ 角在第_____象限內。

※(3) 已知 $\tan \theta = -\frac{3}{4}$ 且 $-270^\circ < \theta < -180^\circ$ ，則角 θ 的另外五個三角值為何？

三、三角函數的恆等式

例1. 已知 $\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{2}$ ，則 (1) $\sin \theta \cdot \cos \theta = ?$ (2) $\tan \theta + \cot \theta = ?$ (3) $\sin^3 \theta + \cos^3 \theta = ?$

例2. 已知 $\tan \theta + \cot \theta = 2$ 且 $0 < \theta < 90^\circ$ ，則 (1) $\sin \theta \cdot \cos \theta = ?$ (2) $\sin \theta + \cos \theta = ?$

例3. 求下列各值：

(1) $\sin 10^\circ \cdot \cos 20^\circ \cdot \tan 40^\circ \cdot \cot 40^\circ \cdot \sec 20^\circ \cdot \csc 10^\circ = \underline{\hspace{2cm}}$

(2) $\sin 25^\circ \times \csc 25^\circ + \cos 15^\circ \times \sec 15^\circ + \tan 36^\circ \times \cot 36^\circ = \underline{\hspace{2cm}}$ (3) $\sin^2 \frac{\pi}{7} + \cos^2 \frac{\pi}{7} + \cot^2 \frac{3\pi}{7} - \csc^2 \frac{3\pi}{7} = \underline{\hspace{2cm}}$

(4) $\sin \frac{\pi}{11} \cdot \cos \frac{\pi}{8} \cdot \tan 30^\circ \cdot \cot 30^\circ \cdot \sec \frac{\pi}{8} \cdot \csc \frac{\pi}{11} = \underline{\hspace{2cm}}$ (5) $\tan^2 20^\circ + \cos^2 20^\circ - \sec^2 20^\circ + \sin^2 20^\circ = \underline{\hspace{2cm}}$

(7) $\sin^2 32^\circ - \sec^2 25^\circ + \csc^2 27^\circ + \tan^2 25^\circ + \cos^2 32^\circ - \cot^2 27^\circ = ?$ ※(8) $(\sin \theta + \csc \theta)^2 + (\cos \theta + \sec \theta)^2 - (\tan \theta + \cot \theta)^2 = ?$

例4. (方程式) 試問： (1) 設 $3\cos^2 \theta + 5\cos \theta - 2 = 0$ ，則 $\cos \theta = ?$

※ (2) 若 $\cos x = \tan x$ ，則 $\sin x = ?$

※ (3) 設 $2\csc^2 \theta + 7\csc \theta - 4 = 0$ ，則 $\csc \theta = ?$

以上各題的角為同角!!

四、一般角三角函數化成銳角三角函數 (⇒化成同角)

例1. 下列敘述何者為真？ (複選)

(A) $\sin(-15^\circ) = \sin 15^\circ$

(B) $\cos(-15^\circ) = \cos 15^\circ$

(C) $\tan(-15^\circ) = \tan 15^\circ$

(D) $\cot 75^\circ = \tan 15^\circ$

(E) $\sec 115^\circ = -\sec 65^\circ$

(F) $\cot 105^\circ = -\tan 15^\circ$

(G) $\tan(-230^\circ) = -\tan 130^\circ$

(H) $\cot 75^\circ = -\tan 195^\circ$

例2. 求下列各值：

(1) $\sin 10^\circ - \tan 20^\circ + \cot 70^\circ - \cos 80^\circ = \underline{\hspace{2cm}}$

(2) $\cos^2 15^\circ + \sin^2 165^\circ = \underline{\hspace{2cm}}$

(3) $\sin^2 20^\circ + \sin^2 70^\circ + \tan^2 40^\circ - \sec^2 140^\circ = \underline{\hspace{2cm}}$

(4) $\sec^2 73^\circ + \sin 27^\circ \cdot \csc 27^\circ - \tan^2 73^\circ = \underline{\hspace{2cm}}$

例3. (1) 求值 $\sin(45^\circ - \theta) - \cos(45^\circ + \theta)$ 得_____

(2) 設 $0^\circ < \theta < 45^\circ$ ，則 $\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) = \underline{\hspace{2cm}}$

例4. 試問：

(1) 已知 $\cos 12^\circ = k$ ，則 $\sin 282^\circ = ?$

(2) 已知 $\tan 22^\circ = k$ ，則 $\sin 2002^\circ = ?$

(3) 已知 $\cot \theta = 3$ ，則 $\tan(270^\circ - \theta) = ?$

例5. 化簡：

(1) $\frac{\sin(90^\circ + \theta)\cos(90^\circ - \theta)}{\cos(180^\circ + \theta)} + \frac{\sin(180^\circ - \theta)\cos(270^\circ - \theta)}{\sin(360^\circ - \theta)} = ?$ (2) $\sin(2\pi - \theta)\sec\left(\frac{1}{2}\pi + \theta\right) + \tan\left(\frac{3}{2}\pi - \theta\right)\cot\left(\frac{3}{2}\pi + \theta\right) = ?$

(3) $\frac{\sin(\pi - \theta)}{\sin(\theta - 2\pi)} - \frac{\tan(\theta - \frac{\pi}{2})}{\cot(\pi + \theta)} + \frac{\sin(\theta - \frac{3}{2}\pi)}{\cos(\theta - \pi)}$ 得？

(4) $\frac{\sin(-\theta)}{\sin(\pi + \theta)} - \frac{\tan(\frac{3}{2}\pi + \theta)}{\tan(\frac{3}{2}\pi - \theta)} - \frac{\cos(-\theta)}{\sin(\frac{1}{2}\pi + \theta)}$ 得？

1. ※設 $\tan \theta = 4$ ，則 $5\sin \theta + 4\sec \theta$ 之值為_____

2. ※設 $\tan \theta = -\frac{3}{4}$ 且 $\cos \theta < 0$ ，則

(1) $\frac{4\sin \theta + \cos \theta}{2\sin \theta - 3\cos \theta} = \underline{\hspace{2cm}}$

(2) $\frac{\sin \theta - \sec \theta}{\sin \theta + \cos \theta} = \underline{\hspace{2cm}}$

化簡：(先化成只有 $\sin \theta$ 與 $\cos \theta$)

1. ※化簡 $\frac{1}{1+\csc \theta} + \frac{1}{1+\sin \theta} + \tan \frac{\pi}{4}$ 得_____

2. ※設 $\frac{\sin \theta}{1-\cos \theta} + \frac{1-\cos \theta}{\sin \theta} = k$ ，則 $k = \underline{\hspace{2cm}}$